

Severino Orlando

Generalizzazione di un elemento finito non lineare e sua formulazione con approccio fiber-free

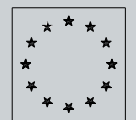


Università
degli Studi
di Napoli
Federico II

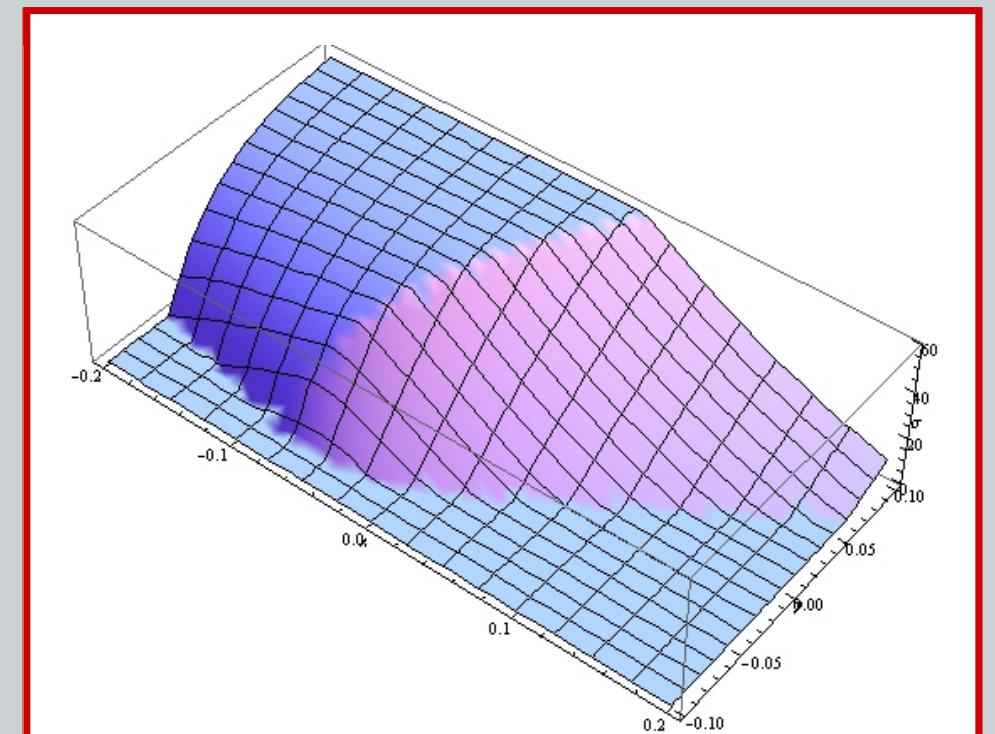
Facoltà di
Ingegneria

Generalizzazione di un elemento finito non lineare e sua formulazione con approccio fiber-free

Severino Orlando



Comunità Europea
Fondo Sociale Europeo



Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Costruzioni

Indice

1 Breve stato dell'arte su alcuni elementi con formulazione a fibre	9
1.1 Teoria della Trave	10
1.2 Gli elementi multifibra	12
1.3 Elementi a fibra basati sui modelli Strut-and-Tie (biella puntone)	15
1.3.1 Formulazione con la strategia di Guedes	15
1.3.2 Strategia di modellazione di Martinelli	20
1.3.3 Strategia di modellazione di Ranzo e Petrangeli	26
1.4 Elemento a fibre basato sul modello di Micropiano	30
1.4.1 Strategia di modellazione di Petrangeli	31
1.5 Elemento trave-colonna in fibra usato nei modelli di rottura diffusa (smeared)	34
1.5.1 Strategia di modellazione di Vecchio e Collins	34
2 Formulazione dell'elemento e determinazione degli effetti dei carichi applicati	40
2.1 Ipotesi	40
2.2 Cambio di riferimento	41
2.3 Eliminazione dei moti di corpo rigido	43
2.4 Valutazione delle caratteristiche della sollecitazione	49
2.5 Procedura di determinazione dello stato dell'elemento	51
2.6 Carico concentrato e distribuito	57
3 Schemi di integrazione	61
3.1 Formule di quadratura Gaussiane	61
3.2 Integrazione sull'elemento	64
3.3 Integrazione nella sezione	65

4	L'approccio Fiber-Free	67
4.1	L'approccio Fiber-Free per l'analisi elasto plastica di una struttura intelaiata	69
4.2	Valutazione delle caratteristiche della sollecitazione per un dominio poligonale	73
4.3	Valutazione della matrice di rigidezza di un dominio poligonale	75
4.3.1	Derivate di \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$ e $\hat{\mathbf{J}}_f$ rispetto a ϵ	76
4.3.2	Derivate di A_{f_4} , \mathbf{s}_{f_4} e \mathbf{J}_{f_4} rispetto a ϵ	77
4.3.3	Derivate \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$ e $\hat{\mathbf{J}}_f$ rispetto a \mathbf{g}	79
4.3.4	Derivate di A_{f_4} , \mathbf{s}_{f_4} e \mathbf{J}_{f_4} rispetto a \mathbf{g}	81
4.4	Alcune formule utili	83
4.5	Risultati numerici	85
4.5.1	Legge bilineare tensioni-deformazioni priva di resistenza a trazione . .	85
4.6	Legge bilineare: le funzioni costitutive	86
4.6.1	Legge bilineare: Primitive delle funzioni costitutive	87
4.6.2	Legge bilineare: Derivate delle funzioni costitutive	87
4.6.3	Integrazione di un modello costitutivo bilineare	88
4.6.4	Integrazione del legame costitutivo di Karsan-Jirsa	93
5	Metodi di integrazione numerica	101
5.1	Metodo di Newton-Raphson	101
5.1.1	Gli arc-length ed i relativi metodi	104
5.1.2	Criteri di convergenza	111
6	Deformata di una struttura in ambito non lineare	113
6.1	Spline cubica di Hermite	114
6.1.1	Interpolazione di un singolo intervallo (0,1)	114
6.1.2	Interpolazione su $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$	115
6.1.3	Interpolazione di un set di dati	115
6.1.4	Calcolo spostamento	116
7	Esempi di applicazione dell'elemento sviluppato	120
7.1	Modello con formulazione mista di Taylor	121
7.2	Trave di Cervenka	123
7.3	Modello di Vecchio e Balopoulou	128
7.3.1	Osservazioni sul test	130
7.3.2	Confronto tra modelli	132
7.4	Modello di Vecchio-Emara	134

7.4.1	Analisi con programma Ruaumoko	134
7.4.2	Modello con elemento proposto	134
7.4.3	Il confronto dei risultati analitici e sperimentali	136
8	Conclusioni	138
	Bibliografia	139

Introduzione

L'inesauribile richiesta di sicurezza nel settore delle costruzioni, ha notevolmente aumentato l'interesse sia per lo sviluppo di metodi analitici affidabili, atti a valutare la risposta dinamica delle strutture esistenti, sia per lo sviluppo di efficaci strategie di adeguamento. In tale ambito è sempre più riconosciuta, sia in ambito accademico che professionale, l'importanza dell'uso di metodi di calcolo non lineari.

In tal caso il comportamento delle strutture viene rappresentato con una curva definita nel piano forza-spostamento, detta curva di equilibrio, per tracciare la quale è necessario impiegare tecniche numeriche. Tra quelle più diffuse vi è il metodo di Newton-Raphson e l'Arc-Lenght nel caso di comportamento di tipo softening. In ambito non lineare sia l'analisi statica che quella dinamica, sono computazionalmente molto onerose. Per ridurre almeno in parte, tale onere, gli elementi strutturali $3D$, vengono modellati con elementi monodimensionali, di tipo trave. In questo modo, si hanno notevoli benefici in termini di economia computazionale, senza compromettere la precisione dei risultati.

L'approccio tradizionale nella formulazione dell'elemento non lineare è il metodo degli spostamenti o della rigidezza, che si basa su appropriate funzioni di interpolazione degli spostamenti assiali e trasversali dell'elemento. Tale formulazione, si basa sull'ipotesi che, i campi di spostamenti trasversali siano descritti da una combinazione lineare di polinomi cubici Hermitiani, mentre gli spostamenti assiali sono interpolati mediante funzioni lineari. Queste modalità di interpolazione rappresentano la soluzione ideale per una trave prismatica, elastica lineare.

In ambito non lineare i risultati ottenuti con la formulazione agli spostamenti sono influenzati in modo rilevante dal numero di elementi in cui si discretizza la struttura e sono tanto più esatti quanto maggiore è tale numero. La formulazione agli spostamenti tende a sovrastimare la rigidezza della struttura e l'effetto è particolarmente apprezzabile quando si utilizzano pochi elementi.

Di fatto il comportamento non lineare del materiale rende del tutto irrealistica l'ipotesi sulla forma cubica della deformata tipicamente adottata in campo lineare. Inoltre, come già mostrato in [55], mentre un maggior numero di sezioni di controllo produce risultati più

accurati per la valutazione degli integrali, tale precisione non necessariamente produce un migliore comportamento a livello strutturale. Infatti a causa dell'effetto irrigidente della formulazione agli spostamenti, una valutazione più accurata degli integrali può tradursi nell'imposizione più marcata del vincolo sugli spostamenti implicitamente assunto dalla forma cubica assegnata alla deformata, intrinseco della formulazione agli spostamenti.

La formulazione di elementi finiti basati sul metodo delle forze, invece, si basa sulla definizione di funzioni di interpolazione delle caratteristiche della sollecitazione. Per strutture geometricamente lineari è semplice selezionare polinomi che soddisfano punto per punto l'equilibrio dell'elemento. Infatti, in assenza di carichi applicati all'elemento, si hanno forza assiale costante e momento flettente variabile linearmente, come mostrato anche in [123, 124]. Queste funzioni di interpolazione rappresentano la soluzione esatta all'equilibrio dell'elemento, qualunque sia il legame costitutivo dell'elemento trave.

Il principale ostacolo alla diffusione di questo tipo di elemento è rappresentato dalla difficoltà di programmare in un programma di analisi che si basa sul metodo degli spostamenti, la procedura non lineare, per la determinazione dello stato dell'elemento. Questo ostacolo è superato negli elementi finiti trave basati sulle forze [17, 103, 108] con una procedura di determinazione dello stato dell'elemento che calcola iterativamente le forze resistenti e la matrice di rigidezza dell'elemento, in grado di soddisfare le condizioni di equilibrio e di compatibilità ad ogni iterazione. Questa procedura è molto più complessa rispetto a quella impiegata per elementi finiti basati sugli spostamenti.

In particolare, non è sempre dettagliato come implementare un elemento finito basato sul metodo delle forze all'interno di un codice basato sul metodo spostamenti in modo da mutuare i vantaggi di codici già funzionanti da tempo. Inoltre, cfr. ad es. [67], non viene mai precisato come tener conto dei carichi distribuiti.

La determinazione degli effetti dei carichi applicati lungo l'elemento, può essere ottenuta mediante la definizione di opportuni operatori che trasformano il carico in forze nodali, sia che si tratti di carico uniforme che di forze concentrate, evitando il ricorso all'inserimento di un nodo in corrispondenza della forza concentrata, e quindi evitando di suddividere l'elemento in più parti.

Nella formulazione alle forze, vengono interpolate le caratteristiche della sollecitazione e quindi in ciascuna sezione dell'elemento sono note le sollecitazioni.

Le componenti di deformazione, invece sono calcolate solo nelle sezioni di controllo, tramite il legame costitutivo. Questa mancanza, può essere eliminata, interpolando la curvatura, mediante la spline cubica di Hermite.

Al termine di ogni step dell'analisi non lineare, basata sul metodo di Newton-Raphson o

sull’Arc-Length, in ogni sezione di controllo sono note le componenti di deformazione.

I valori di deformazione di ciascuna sezione di controllo, sono interpolati con la spline: in tal modo si ottiene una distribuzione di deformazione lungo l’elemento trave. Integrando la deformazione e calcolando opportunamente la condizioni al contorno, si ottengono sia gli spostamenti trasversali che longitudinali dell’elemento.

A livello di sezione, le forze interne e la matrice di rigidezza sono espresse da integrali bidimensionali estesi al dominio della sezione retta dell’elemento. Tipicamente, per la valutazione di tali integrali si utilizza il metodo a fibre. In questo metodo la sezione retta è suddivisa in un numero n_f di sottosezioni, chiamate fibre. La fibra i – esima di area A_f , è identificata dalla posizione del suo centro $\mathbf{r}_f = \{\mathbf{r}_f, \mathbf{y}_f\}^T$. Il valore della deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}_f$, al centro della fibra, è assunto costante nell’intera A_f ; di conseguenza gli integrali per il calcolo delle forze interne e la matrice di rigidezza della sezione, sono ottenuti come sommatoria delle forze interne e delle matrici di rigidezza di ciascuna fibra.

Un’approccio più raffinato, per la valutazione dello stato della sezione, è metodo il Fiber-Free, basato su una integrazione analitica. Questo metodo ha origine dalla constatazione che il comportamento elasto-plastico del materiale è governato dalla funzione $\boldsymbol{\varepsilon}_m^c$ che definisce la minima deformazione raggiunta nel generico punto della sezione durante la precedente storia di carico. In questo modo è possibile integrare analiticamente le funzioni costitutive, e calcolare le forze interne e la rigidezza della sezione.

In un certo momento dell’analisi t^c e per un fissato punto $\bar{\mathbf{r}}$ della sezione Ω , $\boldsymbol{\varepsilon}_m^c$ è dato dal minimo di tutti i valori che il campo delle deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}^l$ ha assunto in $\bar{\mathbf{r}}$ durante gli istanti $t < t^c$.

In questo modo, è possibile raggruppare, i punti della sezione il cui minimo sforzo è definito mediante la stessa funzione $\boldsymbol{\varepsilon}^l$ per definire un adeguato sottodominio della sezione, nel quale integrare una singola funzione di sollecitazione. Di conseguenza, il dominio Ω , è considerato come unione di un insieme finito di sottodomini non sovrapponibili e che si evolve nel tempo in funzione dei carichi applicati.

Quindi, nell’approccio Fiber-Free, il comportamento elasto-plastico della sezione non è più descritto da una variabile per ogni fibra, ma da un insieme finito di tre componenti vettoriali $[\boldsymbol{\varepsilon}^l, -\boldsymbol{\chi}_y^l, \boldsymbol{\chi}_x^l]^T$, i quali sono i parametri di deformazione della l – esima funzione $\boldsymbol{\varepsilon}^l$. Tali parametri definiscono la storia di deformazione della sezione prima dell’istante t^c dell’analisi corrente. L’approccio del Fiber-Free permette una valutazione esatta e più veloce degli integrali della sezione e non è affetto da errori numerici indotti dalla suddivisione in fibre della sezione.

In questa tesi, è stato sviluppato in Matlab, un elemento finito di tipo trave, per l’analisi

statica non lineare, di strutture intelaiate che costituisce una estensione dell'elemento originariamente sviluppato da Neuenhofer e Filippou [67]. infatti l'elemento proposto è basato, come quello sviluppato in [67], sulla formulazione alle forze, mentre l'analisi della sezione viene condotta con l'approccio del Fiber-Free. Inoltre, mediante la scrittura di appositi operatori, l'elemento proposto consente di valutare in termini di sollecitazioni, l'influenza degli effetti dei carichi applicati lungo il suo asse. Infine, mediante l'interpolazione basata sull'uso di spline, si ottiene la distribuzione delle deformazioni lungo l'elemento e, conseguentemente, il campo di spostamenti. Pertanto l'elemento proposto presenta notevoli vantaggi: innanzitutto si conoscono gli spostamenti direttamente dall'analisi; si può determinare la posizione e le dimensioni effettive delle eventuali zone plasticizzate; infine è possibile disegnare l'elemento deformato in $3D$ ed è anche possibile eseguire verifiche di duttilità e di deformabilità in punti non coincidenti con le sezioni di controllo o con i nodi del modello strutturale.

Per verificare se l'elemento proposto fornisca risultati accettabili sono state eseguite delle analisi, su diversi modelli strutturali, di cui è noto sia il comportamento sperimentale che quello numerico ottenuto dagli sperimentatori.

Come primo test, è stato considerata una trave in acciaio appoggiata e appoggiata, oggetto di analisi numeriche in [110]. In questo caso il modello proposto restituisce dei risultati molto vicini a quelli forniti dai suddetti autori.

Il secondo test è stato eseguito su una trave-pannello in c.a., i cui risultati sperimentali e numerici sono dovuti a Cervenka e Gerstle [49]. A causa della particolare forma della trave, sono stati realizzati diversi modelli strutturali: un modello in cui si trascura la presenza delle costolature, un modello in cui la trave è stata suddivisa in due elementi e un terzo modello che considera la reale geometria della trave. In tal caso l'elemento proposto fornisce risultati leggermente differenti a seconda del modello ma, complessivamente, essi si avvicinano a quelli sperimentali in maniera più marcata rispetto a quello numerico ottenuto dagli autori suddetti con elementi shell.

Nel terzo test è stato considerato un telaio di due piani, caricato con una forza verticale concentrata nella sezione di mezzeria del primo piano. Anche in questo caso il modello riproduce i dati sperimentali in maniera più accurata rispetto a quanto fatto dal modello numerico realizzato dagli stessi autori.

L'ultimo test riguarda lo stesso telaio, ma caricato all'ultimo piano da una forza orizzontale; in tal caso si è valutata anche l'influenza dei braccetti rigidi, analizzando due modelli separati di cui uno solo con i braccetti rigidi in corrispondenza dei nodi. Entrambi i modelli riproducono i risultati sperimentali con un'ottima approssimazione, in particolare quello caratterizzato dalla presenza dei braccetti rigidi; infatti con essi la struttura coglie perfetta-

mente il comportamento iniziale, mentre il modello che ne è privo si presenta più deformabile. In definitiva il modello riproduce in maniera accettabile i risultati sperimentali; in particolare il tratto lineare è sempre descritto con elevata accuratezza, il tratto non lineare, invece, si discosta maggiormente, ma questo è dovuto al legame costitutivo del calcestruzzo tipo parabola-rettangolo che non presenta il ramo softening, tipico del reale comportamento del calcestruzzo.

Capitolo 1

Breve stato dell'arte su alcuni elementi con formulazione a fibre

Le strutture in cemento armato del nostro patrimonio edilizio sono state progettate molti decenni fa, sicchè esse non sono quasi mai conformi ai requisiti degli attuali codici. Ciò comporta che una notevole quantità di risorse umane e finanziarie deve essere investita in programmi di adeguamento strutturale. Pertanto, al fine di minimizzare gli investimenti economici, è fondamentale definire procedure e metodi di analisi che forniscono valutazioni realistiche della resistenza, rigidità e duttilità delle strutture esistenti, in particolare degli elementi con comportamento critico a taglio.

Nell'analisi di strutture in cemento armato, sono stati proposti svariati approcci per la modellazione costitutiva. Questi includono le procedure basate sulla teoria della plasticità, sulla meccanica della frattura, sulla meccanica del danno, su quella accoppiata con la plasticità, nonché svariati modelli ipoelastici. In quest'ultimo caso, gli approcci vanno dai modelli discreti di crack a quelli con crack rotante. Finora sono state elaborate formulazioni che forniscono risultati accettabili per carichi ciclici e modelli strutturali $1D$ e $2D$. Viceversa simulazioni accurate di comportamento per condizioni generali di carico, in particolare in condizioni di carico ciclico invertito, per modelli strutturali $3D$ sono piuttosto rare.

Pertanto lo stato dell'arte nella progettazione sismica corrente richiede sempre più spesso analisi non lineari di tipo statico e dinamico. Queste analisi non lineari sono in gran parte condotte utilizzando elementi monodimensionali con diversi livelli di sofisticazione. In tale ambito i due approcci tradizionalmente utilizzati sono quelli noti come modelli a plasticità concentrata o distribuita. Nel secondo approccio, i cosiddetti elementi a fibra forniscono i risultati che sembrano essere particolarmente adatti per lo studio del comportamento sismico di strutture in cemento armato: l'accoppiamento tra momento flettente e sforzo normale è

facilmente preso in considerazione così come l'interazione tra cemento e acciaio nella sezione retta della trave.

Negli ultimi 20 anni sono stati sviluppati diversi elementi a fibre con una soddisfacente capacità di modellare gli effetti assiali e flessionali. Viceversa, l'accoppiamento tra il comportamento flessionale e quello tagliante non è semplice e quindi solo pochi autori hanno finora formulato elementi in tal senso. Lo scopo di tale introduzione è quindi quello di presentare una breve panoramica degli elementi a fibre evidenziando le loro peculiarità e/o carenze

Nelle seguenti sezioni, viene presentata una sintesi delle due principali formulazioni di elementi di trave e cioè quella di Eulero-Bernoulli e quella di Timoshenko. Tali formulazioni sono poi ulteriormente dettagliate con riferimento alla loro implementazione in un modello sezionale a fibre. Il contenuto di tale capitolo è tratto essenzialmente dall'articolo [14] cui si rimanda per ulteriori dettagli.

1.1 Teoria della Trave

La più diffusa teoria in grado di analizzare gli elementi monodimensionali è basata sull'approccio di Eulero-Bernoulli (EB). Le ipotesi fondamentali sono che la sezione rimane piana e normale all'asse longitudinale deformato come mostrato nelle figure 1.1 e 1.2. La cinematica

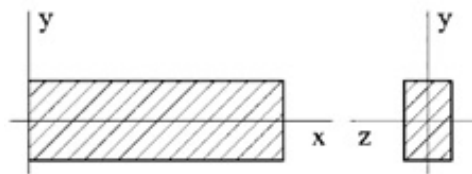


Figura 1.1: sistema di riferimento locale (trave con asse lungo x e sezione trasversale nel piano y,z)

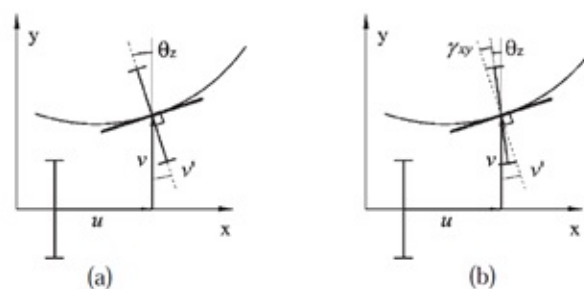


Figura 1.2: Cinematica della trave secondo la teoria (a) di Eulero-Bernoulli o (b) Timoshenko (nel piano $x-y$).

di una trave 3D [125] è definita dal seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_x(x, y, z) = \mathbf{u}(x) - \mathbf{y}\theta_z(x) + \mathbf{z}\theta_y(x) \\ \mathbf{s}_y(x, y, z) = \mathbf{v}(x) - \mathbf{z}\theta_z(x) \\ \mathbf{s}_z(x, y, z) = \mathbf{w}(x) - \mathbf{y}\theta_x(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{s}_x , \mathbf{s}_y , \mathbf{s}_z sono gli spostamenti nelle direzioni x , y e z , rispettivamente, di generico punto della sezione avente baricentro in corrispondenza dell'ascissa x lungo l'asse della trave (figura 1.1): $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ sono gli spostamenti lungo x , y e z rispettivamente, del baricentro della sezione della trave e $\epsilon_x(x)$, $\epsilon_y(x)$, $\epsilon_z(x)$ sono le rotazioni dell'asse della trave intorno a x , y e z rispettivamente. Nel seguito, per semplificare la notazione, gli apici indicheranno la derivata rispetto a x .

Trascurando il grado di libertà torsionale $\theta_y(x)$, le deformazioni assiali e di taglio sono date da:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}(x) = \frac{ds_x}{dx} = \mathbf{u}'(x) - \mathbf{y}\theta'_z(x) + \mathbf{z}\theta'_y(x) \\ \epsilon_{xy}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_y}{dx} + \frac{ds_x}{dy} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}'(x) - \theta_z(x)) \\ \epsilon_{xz}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_z}{dx} + \frac{ds_x}{dz} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{w}'(x) - \theta_x(x)) \end{cases} \quad (1.2)$$

In base alle ipotesi del modello di Eulero-Bernulli:

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(x) - \theta_z(x) = 0 \rightarrow \epsilon_{xy}(x) = 0 & e \quad \chi_z(x) = \mathbf{v}''(x) \\ \mathbf{w}'(x) + \theta_y(x) = 0 \rightarrow \epsilon_{xz}(x) = 0 & e \quad \chi_y(x) = -\mathbf{w}''(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

dove $\chi_z(x)$ e $\chi_y(x)$ sono le curvature della sezione.

Evidentemente, la teoria di E.B. è capace di riprodurre correttamente la risposta di una trave sotto l'azione di forze assiali e momenti flettenti mentre le forze di taglio sono recuperate dall'equilibrio statico ed i relativi effetti sulla deformazione della trave sono trascurate. Viceversa, quando gli effetti delle sollecitazioni tangenziali sono significativi per la risposta dell'elemento, devono essere utilizzate le teorie più raffinate descritte nel seguito.

Il modello di Timoshenko permette di considerare gli effetti della deformazione da taglio per mezzo di una distribuzione costante lungo la sezione trasversale; ciò implica l'introduzione un fattore di area a taglio effettiva per garantire una formulazione energeticamente coerente. Il fattore di area a taglio dipende dalla forma della sezione ed è solitamente derivato per materiali isotropi. Ciò implica che in analisi non lineari di cracking per sezioni in cemento armato tale fattore è dipendente dallo stato della sezione ed molto più complesso da calcolare.

La teoria Timoshenko è basata sull'assunzione che le sezioni rimangono piane ma non

necessariamente normali all'asse longitudinale deformato.

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(x) - \theta_z(x) \neq 0 \rightarrow \varepsilon_{xy}(x) \neq 0 \\ \mathbf{w}'(x) + \theta_y(x) \neq 0 \rightarrow \varepsilon_{xz}(x) \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Per effetto della rotazione della sezione normale causata dalle tensioni di taglio (figura 1.2b), le deformazioni diventano:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(x) = \mathbf{u}'(x) - \mathbf{y}\theta'_z(x) + \mathbf{z}\theta'_y(x) \\ \varepsilon_{xy}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}'(x) - \theta_z(x)) \rightarrow \theta_z(x) = \mathbf{v}'(x) - \gamma(xy) \quad e \quad \chi_z(x) = \theta'_z(x) \\ \varepsilon_{xz}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}'(x) + \theta_y(x)) \rightarrow \theta_y(x) = -\mathbf{w}'(x) + \gamma(xz) \quad e \quad \chi_y(x) = \theta'_y(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

con l'assunzione che $2\varepsilon_{xy}(x) = \gamma_{xy}(x) \quad e \quad 2\varepsilon_{xz}(x) = \gamma_{xz}(x)$.

1.2 Gli elementi multifibra

Gli elementi trave con approcci a fibre sono stati sviluppati più di venti anni fa [16], [103]. Essi si basano sulla discretizzazione della sezione in una serie di strati (per una trave $2D$) o fibre (per una trave $3D$, cfr. figura 1.3). Lavorando a livello di sezione con semplici modelli costitutivi monoassiali, il comportamento $3D$ per effetto di azioni assiali e flettenti viene ottenuto attraverso l'integrazione delle sollecitazioni relative alla singola fibra sull'intera sezione trasversale.

L'approccio a fibre si sposa perfettamente con la teoria di EB; considerando una generica sezione della trave, e conoscendo la deformazione assiale $\varepsilon_0(x)$ e la curvatura della sezione $\chi_y(x)$ e $\chi_z(x)$, la deformazione assiale di ciascuna fibra in cui la sezione è suddivisa è data da:

$$\varepsilon'_{xx}(x) = \varepsilon_0(x) + \mathbf{z}'\chi_y(x) - \mathbf{y}'\chi_z(x) \quad (1.6)$$

dove y^i e z^i sono le distanze tra il centro di gravità della fibra i -esima e quello della sezione totale (figura 1.4). In base al legame costitutivo uniassiale del materiale, la tensione delle fibre longitudinale è derivata direttamente da:

$$\sigma'_{xx}(x) = \mathbf{E}'_T \varepsilon'_0(x) \quad (1.7)$$

dove \mathbf{E}'_T è il modulo tangente della fibra i -esima. Pertanto, la somma delle forze sulla sezione della trave (sforzo normale e momento flettente) è facilmente calcolabile attraverso la somma dei contributi di ciascuna fibra:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{nfib} \sigma'_{xx} \mathbf{A}^i; \quad \mathbf{M}_z = - \sum_{i=1}^{nfib} \sigma'_{xx} \mathbf{y}^i \mathbf{A}^i; \quad \mathbf{M}_y = \sum_{i=1}^{nfib} \sigma'_{xx} \mathbf{z}^i \mathbf{A}^i \quad (1.8)$$

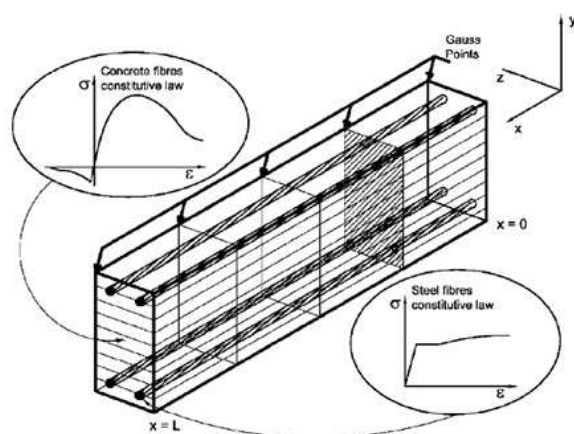


Figura 1.3: schema dell'elemento a fibre [89]

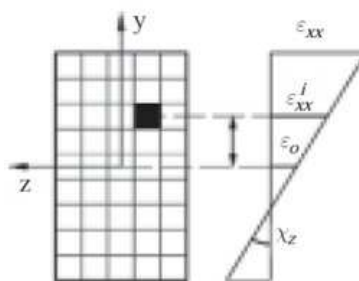


Figura 1.4: Discretizzazione in fibre di una sezione

dove A^i è l'area della i -esima fibra.

Gli elementi a fibre, come sopra descritti, non sono capaci di tenere in conto tensioni tangenziali di taglio, sicchè le sollecitazioni di taglio e a torsione non possono essere integrate come si fa con le tensioni normali. Ciò implica che tale approccio garantisce una descrizione accurata della risposta di elementi sottili con comportamento prevalentemente flessionale (figura 1.5) ma non è efficace quando diventa importante l'accoppiamento tra il taglio, sforzo normale e flessione (figura 1.5) come, per esempio, in strutture in cemento armato con elementi snelli non sottoposte a carico sismico.

Studi recenti hanno tentato di superare questa limitazione introducendo nell'approccio a fibra la teoria di Timoshenko o anche la teoria esatta della trave accoppiata con una legge costitutiva multi-assiale. Diversi aspetti caratterizzano e distinguono le strategie di modellazione esistenti basate sulla teoria di Timoshenko, in funzione

1. del modo in cui si tiene conto delle azioni taglianti,
2. delle ipotesi cinematica,
3. dei modelli costitutivi,
4. della formulazione dell'elemento.

In tale breve introduzione ai modelli a fibra esistenti, seguendo la metodologia adottata in [14], si è deciso di suddividere le strategie di modellazione in due gruppi principali. Il primo gruppo si riferisce a formulazioni in cui sono sovrapposti modelli indipendenti per le deformazioni di taglio e di flessione, e dove una modellazione a traliccio viene impiegata per tenere conto della deformazione di taglio e della resistenza [36, 58, 89].

Viceversa, il secondo gruppo si riferisce a strategie di modellazione che cercano di caratterizzare i fenomeni meccanici usando opportune relazioni costitutive. In base ai modelli costitutivi utilizzati, le formulazioni del secondo gruppo sono state suddivise in tre sottoclassi: elementia a fibre basati sulla teoria Microplane [82], la teoria "smeared crack" [117, 5, 8], e i modelli basati sulla meccanica del danno [45].

Nello sviluppo dell'elemento trave, alcuni degli autori citati hanno utilizzato un approccio standard agli spostamenti (rigidezza), mentre altri hanno introdotto un approccio alle forze (flessibilità). Un elemento finito basato sull'approccio alle forze fornisce le soluzioni esatte per l'analisi non lineare di strutture intelaiate, utilizzando funzioni di interpolazione per le caratteristiche della sollecitazione, che soddisfano strettamente l'equilibrio dell'elemento e impongono il soddisfacimento della condizione di compatibilità. Di conseguenza, questo approccio consente il superamento di alcuni limiti dell'approccio agli spostamenti [102, 103].

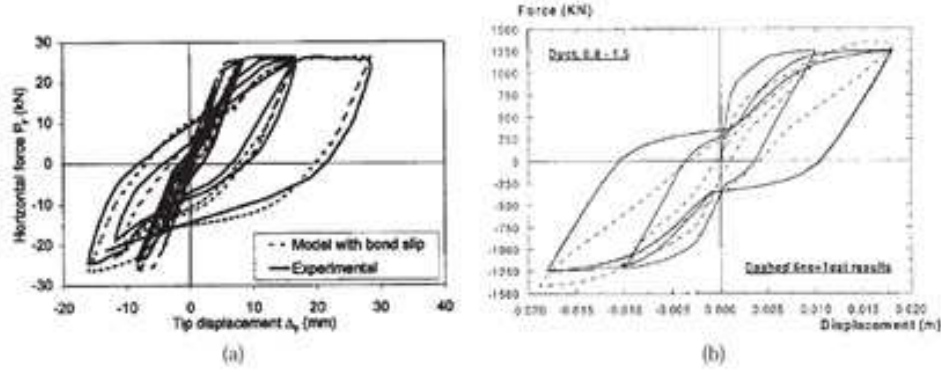


Figura 1.5: confronto tra i risultati sperimentali e numerici di (a) una trave a mensola snella [106] e (b) pila da parete tozza [89] usando modelli a fibra puramente flessionali.

In particolare, l'analisi non lineare diventa indipendente dall'approssimazione del campo di spostamenti in quanto le deformazioni della trave sono il risultato delle equazioni di equilibrio e della integrazione dell'equazione di compatibilità: richiede un numero inferiore di elementi per la rappresentazione del comportamento non lineare e, soprattutto, nel caso di elementi con la formulazione di Timoshenko, evita il ben noto problema del bloccaggio cinematico [24, 125, 39].

1.3 Elementi a fibra basati sui modelli Strut-and-Tie (biella puntone)

Questo approccio considera un elemento a fibre in cui le componenti del taglio sono derivate da un modello strut-and-tie accoppiato al modello trave. Alcune delle strategie di modellazione proposte in letteratura sono discusse nel seguito.

1.3.1 Formulazione con la strategia di Guedes

Guedes e altri [36] [36], hanno sviluppato un modello numerico per travi e pilastri tozzi in cemento armato. L'elemento finito proposto, di tipo tridimensionale, è a due nodi con approccio alla Timoshenko e basato su una formulazione agli spostamenti con funzioni di forma lineari per lo spostamento assiale e la rotazione. Le deformazioni generalizzate di taglio vengono modificate mediante l'eliminazione dei termini lineari secondo Pegon [76], annullando a priori il problema del locking da taglio. I gradi di libertà per nodo sono sei, tre traslazioni e tre rotazioni:

$$\mathbf{u}(x) = \{\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x), \boldsymbol{\theta}_x(x), \boldsymbol{\theta}_y(x), \boldsymbol{\theta}_z(x)\}^T \quad (1.9)$$

A livello di sezione, le componenti assiali sono ottenute attraverso la discretizzazione delle sezioni in fibre, mentre le componenti di taglio sono ottenute indipendentemente mediante un modello tirante-puntone (figura 1.6). Il traliccio è costituito da due diagonalali in calcestruzzo, la cui inclinazione rappresenta le direzioni principali di tensione e deformazione, e tiranti in acciaio con direzione longitudinale e trasversale. Le condizioni di compatibilità e di equilibrio sono rappresentate in figura 1.7.

In tal modo, il modello a fibre e quello reticolare interagiscono attraverso la deformazione assiale media, ε_{0e} , che è calcolata in ciascuna sezione trasversale in modo tale che permetta la valutazione dell'eq. (1.10). Questa equazione dà l'espressione delle tensioni principali di trazione e di compressione, calcolate in funzione dei parametri del modello reticolare rappresentato in figura 1.7:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta}{l/(\cos\phi)} = \varepsilon_{oe}(\cos\phi)^2 + \varepsilon_{wy}(\sin\phi)^2 \mp \frac{\tan\gamma}{2}(\sin 2\phi) \quad (i = 1, 2) \quad (1.10)$$

dove $\varepsilon_{oe} = \frac{l_{oe}}{l}$ e γ sono derivati dalla trave di Timoshenko. La deformazione delle staffe,

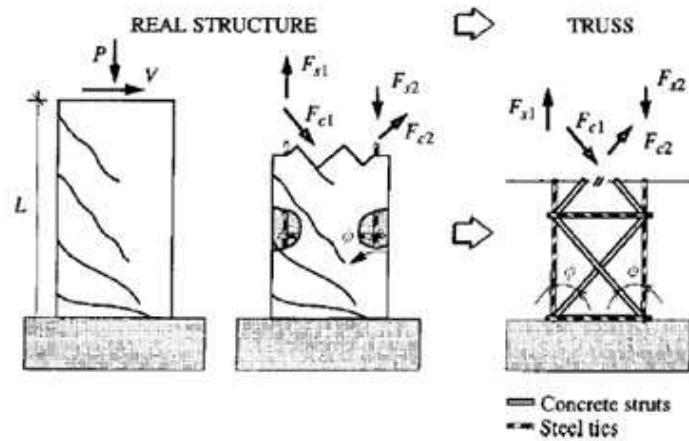


Figura 1.6: analogia del traliccio [37]

$\varepsilon_{wy} = \frac{\Delta_{wy}}{h}$, è calcolata iterativamente attraverso l'equilibrio della sezione trasversale. Le forze nei puntoni in calcestruzzo e i traversi in acciaio sono calcolate attraverso equazioni di equilibrio (figura 1.6 e 1.7):

$$\begin{aligned} F_{ct} &= f_c(\varepsilon_t)A_{strut} = \sigma_c(\varepsilon_t)(1 - D_t)b_w h \cos\phi \quad (i = 1, 2) \\ F_{wy} &= f_{sw}(\varepsilon_{wy}) \frac{h/\tan\phi}{s} (2A_{sw}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove l'area del tirante è pari a $b_w h$, con b_w dimensione trasversale della sezione della colonna; D_i è un parametro di danno equivalente al rapporto $\frac{\varepsilon_{1max}}{\varepsilon_{ult}}$ con ε_{ult} deformazione ultima del calcestruzzo.

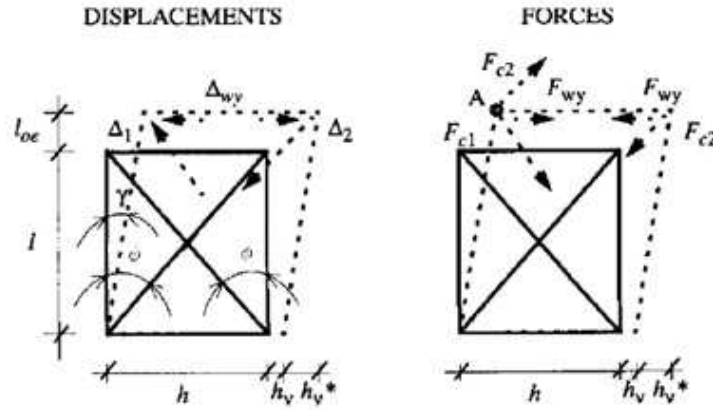


Figura 1.7: compatibilità degli spostamenti e equilibrio delle forze [37]

Riferendosi alle figure 1.6 e 1.7, le forze calcolate mediante le equazioni precedenti devono rispettare, contemporaneamente, l'equilibrio delle forze interne ai punti A e l'equilibrio delle forze esterne nella struttura:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{wy} + (\mathbf{F}_{c1} + \mathbf{F}_{c2})\sin[(82)]_I &= 0 \\ \mathbf{V} + (\mathbf{F}_{c1} - \mathbf{F}_{c2})\sin[(82)]_I &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

La procedura iterativa inizia con un valore di tentativo per ε_{wy} e le deformazioni principali vengono calcolate attraverso l'eq. 1.10, il che implica anche che l'eq. (1.11a) può essere risolta. Conoscendo \mathbf{F}_{c1} , \mathbf{F}_{c2} e \mathbf{f} , la forza \mathbf{F}_{wy} viene quindi derivata dall'eq. (1.12a), e poi usata per il calcolo di ε_{wy} dall'eq. (1.11b). Se quest'ultimo valore corrisponde alla stima iniziale, la soluzione è stata trovata, altrimenti è necessaria una nuova iterazione. Al termine della procedura iterativa viene calcolata la forza di taglio resistente V della sezione trasversale.

Per quanto riguarda la valutazione della matrice di rigidezza, gli autori suggeriscono l'utilizzo della matrice di rigidezza sviluppata per il modello a fibre della trave di Timoshenko, in cui le forze di taglio sono accoppiate alle azioni assiali, mediante le seguenti considerazioni:

1. il comportamento non lineare delle componenti assiali può essere valutato mediante la sostituzione del modulo di Young, E , con il modulo tangente E_{tang} , proveniente curva del materiale $\sigma - \varepsilon$,
2. può essere utilizzata una semplice relazione elastica per unire le tensioni da taglio della trave di Timoshenko alla forza di taglio V derivata dal modello tirante-puntone.

Legami costitutivi

Questa strategia di modellazione utilizza relazioni monoassiali disaccoppiate per la rappresentazione della risposta di calcestruzzo e acciaio. Per il modello del calcestruzzo (figura 1.8),

è stata introdotta una curva parabolica di Hognestad che si estende fino al picco di tensione seguita da una retta nella zona di softening. Per il comportamento a trazione del calcestruzzo è utilizzata una legge tensione deformazione bilineare, con cui si tiene conto dell'effetto confinamento. Per il comportamento ciclico, il modello segue regole empiriche per definire i percorsi di scarico e ricarico.

Dopo la rottura, la tensione è impostata a zero nei successivi passi di carico. Il modello costitutivo non considera il degrado di rigidità poichè il percorso di secondo carico si presume coincidente con la curva di primo carico dalla funzione deformazione massima raggiunta prima dello scarico. Il degrado di resistenza causato dall'inversione di carico viene omessa. Inoltre, l'effetto della chiusura delle fessure viene trascurato. Per descrivere il comportamento dell'acciaio è invece utilizzato, un modello isteretico modificato di Menegotto e Pinto [62], con una curva monotona composta da 3 tratti (lineare, piatto e incurvante), come mostrato in figura 1.8.

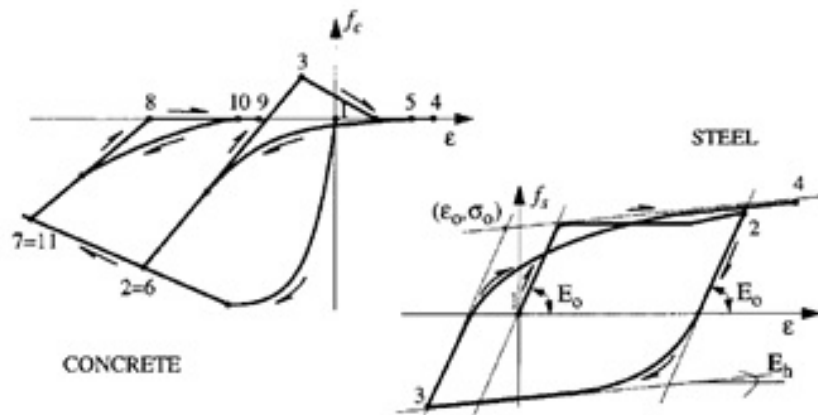


Figura 1.8: Modelli numerici per calcestruzzo e acciaio sotto carico ciclico utilizzati da [37]

Verifica

Il metodo degli elementi finiti è stato implementato nel codice CASTEM 2000 [12] ed è stato poi validato tramite simulazioni numeriche delle risposte di travi a mensola in cemento armato con sezione a T, testato al laboratorio LNEC [12] in condizioni di carico ciclico cfr. figura 1.9. Sono stati effettuati anche ulteriori confronti con la previsione numerica e la risposta sperimentale relativa a una sezione da ponte in C.A. testato dal laboratorio ELSA (figura 1.10).

Caratteristiche del modello

Questo modello è stato uno dei primi tentativi di introdurre la modellazione del taglio in un elemento trave con formulazione a fibre, e questo in sè è molto lodevole. Sebbene si presenti come un modello 3D, il contributo del taglio è modellato con un meccanismo piano. Inoltre, il modello del traliccio non è in grado di tener conto di altri meccanismi di resistenza al taglio, come l'effetto a pettine, ad arco, ingranamento degli inerti e l'effetto spinotto che contribuiscono ad aumentare la resistenza a taglio di un elemento finito trave. Le leggi costitutive per i materiali sono disaccoppiate e monoassiali.

Il parametro D_i , che viene introdotto per tener conto del danno agli elementi in calcestruzzo del traliccio, dipende solo dallo stato di calcestruzzo sottoposto a sforzo assiale e flessione, ed è un parametro monodimensionale. Un altro inconveniente è legato all'angolo di rottura ϕ , che è un parametro del modello assunto pari a 30° o 45° . Il suo valore è fisso (le sue variazioni durante la storia di carico sono trascurate) ed è utilizzato per definire le direzioni principali di tensione.

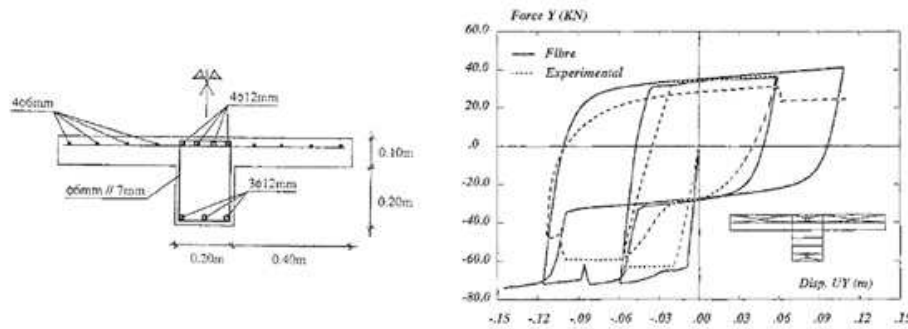


Figura 1.9: Dettagli della sezione e delle curve di risposta della trave a mensola con sezione a **T** [36]

Inoltre il modello basato sull'analogia del traliccio non può rappresentare l'interazione tra le risposte assiale, flessionale e tagliante. Le risposte di taglio e flessione non sono completamente accoppiate poiché la flessione può influenzare il taglio mediante la deformazione assiale media ϵ_{oe} ma non viceversa. La matrice di rigidezza della sezione non è stata esplicitamente discussa. In base agli esempi numerici eseguiti, gli autori hanno notato che il modello non è riuscito a rappresentare correttamente il fenomeno di chiusura delle fessure e che l'effetto di pinching era esageratamente amplificato. Inoltre, la risposta della trave mostrata in figura 1.9 sembra indicare che il modello non è in grado di riprodurre la crisi della sezione osservata sperimentalmente, mentre le simulazioni del pilone in cemento armato riportate in

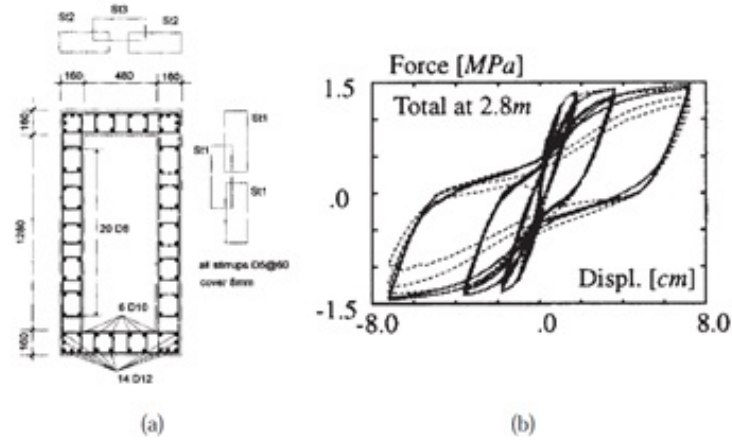


Figura 1.10: Abbassamento pilone (altezza 2,8 m, rapporto trasversale = 1.75) testato nel laboratorio ELSA .(a) dettagli della sezione e (b) taglio alla base della forza vs spostamento in sommità [37]

figura 1.10 evidenziano un degrado della resistenza e della rigidezza diversi da quelli ottenuti sperimentalmente.

1.3.2 Strategia di modellazione di Martinelli

Formulazione dell'elemento

Martinelli [58, 60] ha sviluppato un elemento a fibre basato sulla teoria della trave di Timoshenko per modellare la risposta ciclica delle zone critiche di estremità delle pile da ponte caratterizzate da una snellezza a taglio tra bassa e intermedia. L'autore ha proposto [58] un elemento finito basato sul modello di Garstka e altri [35], accoppiando un modello 3D multi-fibra per le deformazioni flessionali e assiali a un modello di traliccio iperstatico ed anelastico composto da armatura trasversale e diagonali di calcestruzzo compresse e tese.

L'elemento è formulato con un approccio agli spostamenti ed è a tre nodi con il nodo intermedio caratterizzato da un numero ridotto di gradi di libertà rispetto ai nodi terminali: solo rotazioni e spostamenti assiali. L'elemento non soffre del fenomeno di bloccaggio da taglio (shear-locking) avendo una deformazione media costante di taglio lungo l'elemento ed una variazione lineare di curvatura [23]. Le curvature assiali sono calcolate come integrali di volume suddivisi in integrali di area, approssimati mediante sommatoria sulle fibre della sezione, e integrali di linea calcolati mediante uno schema di Gauss-Lobatto a cinque punti.

Il contributo del taglio viene calcolato per integrazione lungo l'elemento della forza di taglio agente sulle sezioni. Il vettore spostamento $\mathbf{u}(x)$ ha le seguenti componenti (figura

1.11):

$$\mathbf{u}(x) = \{u(x), v(x), w(x), \theta_x(x), \theta_y(x), \theta_z(x)\}^T \quad (1.13)$$

con cinque gradi di libertà per nodo per la trave $3D$ o 3 per la trave $2D$ (la rotazione torsionale viene ignorata). La risultante del taglio per la sezione trasversale è derivata da differenti

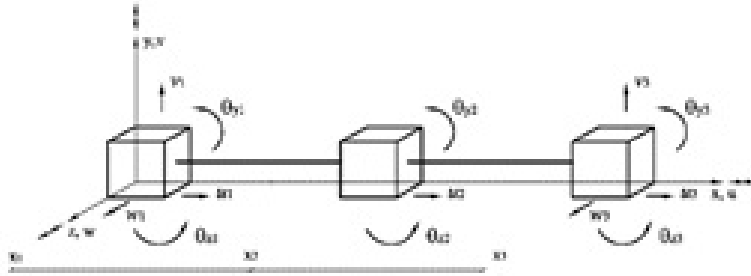


Figura 1.11: gradi di libertà nodali dell'elemento a fibre proposto da [58]

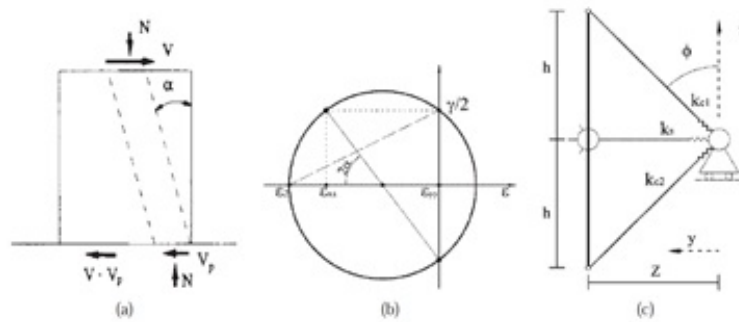


Figura 1.12: gradi di libertà nodali dell'elemento a fibre proposto da [58]

meccanismi di resistenza: comportamento ad arco, il meccanismo a traliccio, il calcestruzzo compresso sopra l'asse neutro, e l'ingranamento degli inerti, ciascuno dei quali è studiato in modo indipendente, come descritto nel seguito.

Il comportamento ad arco è schematicamente rappresentato in figura 1.12a, dove si osserva che un puntone inclinato trasferisce una forza di taglio proporzionale alla forza assiale: $V_p = N \cdot \tan \alpha$. Le fibre sono allineate con il puntone, e l'inclinazione viene calcolata conoscendo i momenti nodali (M_{zi} , M_{yi} , M_{zf} , M_{yf}), nonché la risultante delle sollecitazioni di compressione. In funzione di α , ϵ_{xx} e supponendo $\epsilon_{xx} = 0$, si derivano la tensione principale di compressione ϵ_2 e la deformazione da taglio $\epsilon_{xy}/2$ a partire dal cerchio di Mohr (figura 1.12b).

I legami costitutivi utilizzati in associazione con il meccanismo di puntone sono di tipo monoassiale e ϵ_2 è utilizzata per calcolare la tensione principale compressione σ_2 , con l'assunzione $\sigma_1 = 0$, e cioè tensione principale di trazione nulla. A partire da σ_2 , le tensioni

normali e tangenziali, σ_{xx} , e τ_{xy} , sono calcolate attraverso il cerchio di Mohr. Le forze risultanti sono derivati da un'integrazione delle sollecitazioni sulla superficie lorda A e la zona di calcestruzzo compresso A_{cc} :

$$\begin{aligned} N &= \int A\sigma_{xx}dA, & V_{Pxy} &= \int A\tau_{xy}dA, & V_{Pxz} &= \int A\tau_{xz}dA, \\ M_y &= \int A\sigma_{xx}zdA, & M_z &= - \int A\sigma_{xy}dA, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Un processo iterativo è richiesto per calcolare α , anche se l'autore osserva che in un'analisi dinamica passo passo (step-by-step), α può essere presa, in modo semplificato, come valore alla fine del passaggio precedente.

Il meccanismo a traliccio è basato sull'assemblaggio strutturale di figura 1.12(c) nel piano xy ; esso è composto dal rinforzo trasversale (l'elemento orizzontale di figura 1.12(c), la cui lunghezza Z è il braccio) e le diagonali di calcestruzzo in compressione e trazione (rispettivamente con pedici 1 e 2 in figura 1.12(c)). L'inclinazione diagonale ϕ è un parametro del modello e viene assunto pari all'inclinazione del (crack). La deformazione del traliccio è ottenuta dalla deformazione tagliente calcolata utilizzando la cinematica della trave di Timoshenko (ϵ_{xx} e γ_{xy} sono quantità note), mentre ϵ_{yy} viene assunto pari alla deformazione trasversale dell'acciaio.

Utilizzando il cerchio di Mohr sono calcolate direttamente le deformazioni principali. La deformazione trasversale si ottiene imponendo l'equilibrio lungo la direzione y del modello a traliccio (σ_{yy}). La tensione tangenziale τ_{xy} agente nella sezione trasversale è derivata conoscendo l'inclinazione di entrambe le diagonali sia di compressione che di trazione e le corrispondenti tensioni. Il taglio trasferito dall'azione a traliccio è calcolato integrando le tensioni tangenziali sulla superficie di calcestruzzo teso della sezione trasversale: $V_t = \tau_{xx} \cdot A_t$.

Il contributo della rigidezza tagliente alla matrice di rigidezza della sezione, K_{shear_xy} , a causa della rigidità del rinforzo trasversale e delle fibre di cemento delle due diagonali, K_S, K_{C1}, K_{C2} , figura 1.12(c), viene calcolata con la seguente equazione:

$$K_{shear_xy} = \left\{ \frac{1}{(\tan \phi)^2} (E_1 \alpha_{y,c1}^4 + E_2 \alpha_{y,c2}^4) \left[1 - \frac{E_1 \alpha_{y,c1}^4 + E_2 \alpha_{y,c2}^4}{E_1 \alpha_{y,c1}^4 + E_2 \alpha_{y,c2}^4 + \rho_s E_s} \right] \right\} A_t \quad (1.15)$$

dove E_1, E_2, E_3 sono i moduli tangenti delle fibre rispettivamente di calcestruzzo e acciaio; A è l'area del calcestruzzo in tensione, $\alpha_{i,j}$ è il coseno dell'angolo tra gli assi i e j ; ρ_s è il rapporto dell'armatura a taglio. Il contributo K_{shear_xz} viene calcolato costruendo un assemblaggio analogo a quello utilizzato per modellare il meccanismo del traliccio nel piano xz sicchè, con riferimento alla eq. (1.15), il pedice y deve essere sostituito da z .

Per modellare il meccanismo di ingranamento, si presume che un insieme di fessure diagonali di passo costante s (parametro del modello), inclinate con un angolo costante ϕ rispetto all'asse della trave, caratterizzi il calcestruzzo in tensione. La componente tangenziale τ_{xyIN} sulla sezione trasversale viene calcolata dalle tensioni normali e tangenziali derivanti da spostamenti relativi alle facce della fessura e calcolato dalle deformazioni ε_{xx} e γ_{xy} e $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_s$ derivati dal meccanismo a traliccio. La forza di taglio dovuta al meccanismo di ingranamento è derivata dall'integrazione delle tensioni tangenziali τ_{xyIN} sull'area calcestruzzo sollecitata: $V_{IN} = \tau_{xyIN} A_t$. La forza resistente a taglio è fornita dalla somma dei contributi V_p , V_t e V_{IN} . La matrice di rigidezza della sezione è data da:

$$\mathbf{K}^c = \begin{bmatrix} \int_A \mathbf{E} & 0 & 0 & -\int_A \mathbf{yE} & -\int_A \mathbf{zE} \\ 0 & \mathbf{K}_{shear_xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{shear_xz} & 0 & 0 \\ \int_A \mathbf{zE} & 0 & 0 & -\int_A \mathbf{yzE} & -\int_A \mathbf{z^2E} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

dove \mathbf{E} è il modulo elastico tangente, e i due coefficienti di rigidezza al taglio \mathbf{K}_{shear_xy} e \mathbf{K}_{shear_xz} sono dovuti ai contributi del traliccio, cfr. eq. (1.15).

Modello Costitutivo

Si considerano relazioni costitutive monodimensionali per i materiali (figura 1.13). Il comportamento del calcestruzzo in trazione e in compressione è descritto mediante il modello di Stevens e altri [107], che dispone anche di regole per i percorsi di scarico e ricarico ed è in grado di descrivere il “crack bridging” (che va da E a D in figura 1.13a). Il modello di Monti e Nuti [1992], invece, è stato implementato per modellare la risposta ciclica dell'acciaio.

Verifica

L'elemento a fibra sopra descritto è stato implementato nel codice Nonda [78], e testato su prove statiche monotone e cicliche. In particolare, i confronti sono stati effettuati con i risultati sperimentali ottenuti da prove cicliche su pannelli quadrati c.a. [107], su piloni [85], nonché su tre pareti di taglio [27]. Un campione rappresentativo dei risultati ottenuti è riportata nella figura 1.14, di seguito.

Caratteristiche del modello

Una delle caratteristiche molto positive di questo modello è che si prendono in considerazione diversi meccanismi di resistenza a taglio; i contributi dovuti all'effetto arco, al meccanismo di

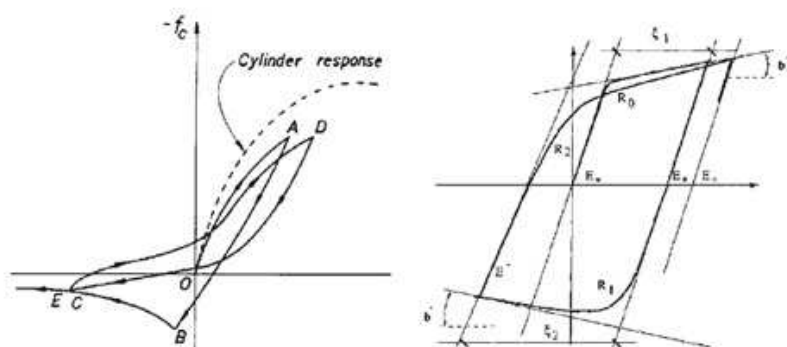


Figura 1.13: modello dei materiali per (a) cemento e (b) acciaio utilizzato da Martinelli [58]

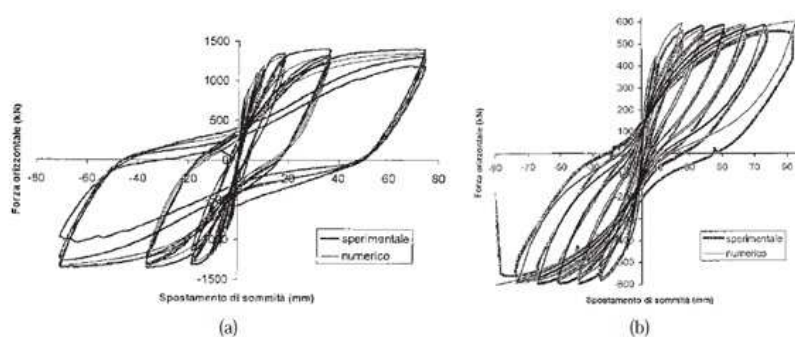


Figura 1.14: risultati numerici e sperimentali (a) dell'abbassamento del pilone testato nei laboratori ELSA [59] e (b) pareti WSH6 [60]

traliccio, ingranamento degli inerti, e alla compressione del calcestruzzo sono tutti descritti. In particolare, i meccanismi di effetto arco, così come il comportamento flessionale, sono formulati in un spazio $3D$, mentre gli altri meccanismi sono studiati in modo indipendente lungo i piani xy e xz : ciò implica effettivamente che il comportamento del modello $3D$ è in qualche modo perso.

Nella modellazione dell'effetto arco, l'angolo α del puntone è determinato iterativamente dai momenti nodali, e le direzioni principali di tensione/deformazione sono definite attraverso questo angolo. Questo contributo tagliente dipende da ε_{xx} e da α mentre ε_{yy} viene assunto nullo), cioè è dipendente dalla flessione dell'elemento; al tempo stesso il rispetto dalla relazione $\mathbf{V}_p = \mathbf{N} \cdot \tan \alpha$, assicurato mediante le rotazioni di fibra, implica che vi è anche una dipendenza inversa. Pertanto, nel meccanismo del puntone vi è un accoppiamento efficace tra comportamento flessionale e tagliente, anche se ciò non è esplicitato in termini di matrici di rigidezza. I parametri del modello a traliccio sono l'inclinazione delle fessure ϕ e le loro distanze, s , assunte costanti. L'effetto dell'armatura longitudinale non è rappresentato. Le deformazioni coinvolte in questo meccanismo sono γ_{xy} e γ_{xz} (dalla cinematica della trave di Timoshenko) e ε_{yy} , trascurato nel meccanismo ad arco, che è derivato iterativamente finché è verificato l'equilibrio nella direzione y del modello a traliccio. In questo caso, l'accoppiamento non è completo.

Nel modellare l'ingranamento degli inerti si impiega la soluzione derivata dal meccanismo a traliccio. Quindi, nel modello, l'ingranamento degli inerti non è in grado di influenzare gli altri meccanismi e, in particolare, di influenzare le direzioni delle tensioni principali. Nella matrice di rigidezza della sezione (eq.1.16), il contributo tagliente è fornito solo dal meccanismo a traliccio ed è completamente disaccoppiato dal termine assiale e flessionale; ciò può portare alla necessità di un maggior numero di iterazioni da eseguire prima di raggiungere la convergenza. In base agli esempi condotti, l'autore ha sottolineato che il modello numerico è incapace di cogliere il collasso del provino (si veda l'applicazione relativa alla prova di abbassamento della pila, in figura 1.14a). Inoltre, tende a sovrastimare il deterioramento ciclico della resistenza in cicli susseguenti ad un aumento degli spostamenti (si veda l'applicazione del test di taglio della parete, in figura 1.14a).

Nel complesso, si può concludere che il modello proposto da Martinelli [58] [60] è in grado di tener conto di diversi meccanismi indipendenti di resistenza tagliente, e, anche non considerando un accoppiamento completo tra i contributi assiali, flessionali e taglienti, è stato in grado di cogliere il comportamento del cemento armato influenzato dal taglio con una precisione molto ragionevole.

1.3.3 Strategia di modellazione di Ranzo e Petrangeli

Formulazione degli elementi

Con lo scopo di sviluppare un elemento di trave con modellazione a taglio della sezione finalizzato ad eseguire l'analisi sismica di strutture c.a., Ranzo e Petrangeli [89] hanno proposto un elemento a fibra $2D$ seguendo un approccio in flessibilità, in cui il comportamento assiale-flessionale è funzione della deformazione assiale ϵ_x e della curvatura χ_{yy} della sezione, come nel tradizionale modello a fibra, mentre il comportamento tagliante è funzione della distorsione della sezione $\gamma(x)$ identificato con un modello non lineare di traliccio. I due meccanismi sono poi accoppiati da un criterio di danno a livello di sezione, seguendo il modello di Priestley e altri [88], e integrato lungo l'elemento. Nella formulazione dell'elemento, le funzioni di

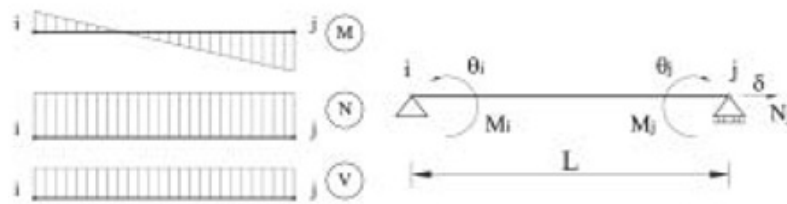


Figura 1.15: funzioni di forma delle tensioni, forze e deformazioni nell'elemento [89]

forma delle tensioni sono introdotte per l'elemento a 2 nodi (vedere figura 1.15), in modo che le forze assiali, momento e taglio possono essere espresse dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{N}(x) = N_j, \\ \mathbf{M}(x) = -(1 - \frac{x}{L})M_i + (\frac{x}{L})M_j, \\ \mathbf{V}(x) = \frac{M_i + M_j}{L}. \end{cases} \quad (1.17)$$

dove N_j è il carico assiale di estremità, e M_i e M_j sono i momenti alle estremità. Queste forze sono associate alle deformazioni di estremità dell'elemento, all'allungamento assiale δ e alle rotazioni θ_i e θ_j . Il vettore della tensione della sezione $\mathbf{p}(x) = [N(x), V(x), M(x)]^T$ e il vettore di deformazione $\mathbf{q}(x) = [\epsilon_0(x), \gamma(x), \chi(x)]^T$ sono messi in relazione attraverso la matrice di rigidezza della sezione:

$$\mathbf{K}^s = \begin{bmatrix} k^{11} & 0 & k^{13} \\ 0 & k^{22} & 0 \\ k^{31} & 0 & k^{33} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

dove

$$\begin{cases} k_{11} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} \mathbf{E}_i \mathbf{A}_i, \\ k_{33} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} \mathbf{E}_i \mathbf{y}^2 \mathbf{A}_i, \\ k_{13} = k_{31} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} \mathbf{E}_i \mathbf{y} \mathbf{A}_i, \\ k_{22} = \frac{\partial [V(\gamma, \epsilon_{max})]}{\partial \gamma} \end{cases} \quad (1.19)$$

Di conseguenza, le rigidzze assiali e flessionale vengono calcolate nel solito modo, in base alle leggi costitutive monodimensionali di tipo ciclico dei materiali, mentre la rigidzza a taglio viene derivata dalla forma generale della relazione costitutiva tagliante (comprendenti il legame principale, lo scarico ed i rami di ricarico, mostrata in figura 1.16) $V(\gamma, \epsilon_{max})$, in funzione della distorsione tagliante e della variabile discreta ϵ_{max} (pari al valore massimo di deformazione alla trazione assiale registrata durante il carico ciclico), come descritto nel seguito.

I rimanenti termini Ks sono uguali a zero in quanto nessun accoppiamento esplicito flessione-taglio viene introdotto nella definizione della matrice di rigidzza della sezione. Poichè l'elemento è basato sull'approccio alle forze ma è stato implementato nell'ambito di un codice agli elementi finiti basato sull'approccio agli spostamenti, nella determinazione dello stato dell'elemento, il vettore delle deformazioni di sezione $\mathbf{q}(x)$ non è noto: è quindi richiesta una procedura iterativa ampiamente descritta in Petrangeli e Ciampi [81].

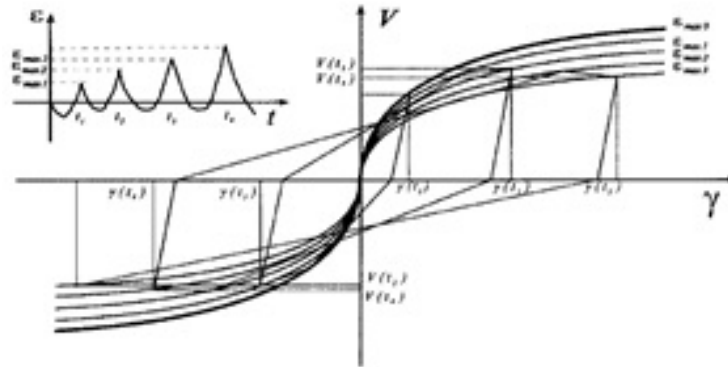


Figura 1.16: modello isteretico del danno-curves del ramo di carico e di quello di degrado [89]

La curva $(V - \gamma)$ è definita dalla risoluzione del modello strut-and-tie, figura 1.17(a), avendo definito un valore medio costante di angolo di inclinazione ϕ in funzione del carico applicato assiale N , dell'armatura a taglio e del comportamento nelle diagonali di calcestruzzo. La curva $(V - \gamma)$ è ottenuta applicando la forza V in piccoli incrementi $\Delta V(i)$ fino a rottura, con lo scorrimento angolare γ definito come $\frac{\delta u}{z + \delta v} \cong \frac{\delta u}{z}$ e utilizzando funzioni analitiche per interpolare questi punti discreti, $V(i) = f(\gamma(i))$, fino ad ottenere una curva

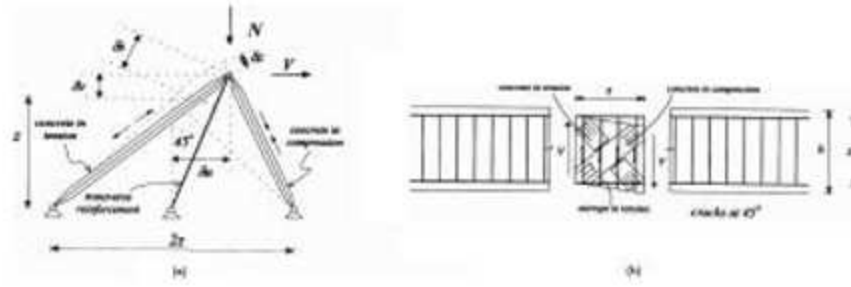


Figura 1.17: Idealizzazione di un segmento di trave [89]

continua. Questa procedura porta alla determinazione del cracking, della plasticizzazione dei valori ultimi della forza di taglio e dello scorrimento.

Per tener conto della dipendenza della resistenza al taglio dal livello di duttilità, il ramo principale della curva di isteresi ingloba un criterio di degrado in cui la curva primaria è funzione della deformazione assiale della sezione ε_{max} , scelta come indicatore di danno (1.16). La configurazione strutturale mostrata in (1.17)(a) è una rappresentazione dettagliata del segmento di trave illustrato in (1.17)(b), e mostra le deformazioni del puntone di calcestruzzo in compressione δ_c e dell'acciaio trasversale δ_s . Il puntone di calcestruzzo in compressione/tensione è un singolo elemento del traliccio la cui area è una percentuale della superficie lorda (a seconda dell'asse neutro nel punto di rottura a flessione).

Il segmento del rinforzo a taglio, invece, è equivalente a una corda la cui sezione trasversale è uguale alla somma delle barre trasversali lungo la lunghezza del segmento più una percentuale delle barre longitudinali (assunto pari al 0,3% della sezione superficie lorda).

Modello Costitutivo

Sono stati impiegati legami costitutivi monodimensionali per il cemento e l'acciaio, in particolare il modello di Mander [52] per il calcestruzzo (figura 1.18). Per il calcestruzzo in trazione si trascura l'effetto di tensione-stiffening in seguito alla fessurazione e la resistenza a trazione viene assunta pari a zero nei passi di carico successivi. Per l'acciaio, è stato utilizzato il modello di Menegotto e Pinto [63].

Verifica

L'elemento a fibra è stato introdotto nel codice EFFIBRE [79], e verificato in condizione sia di carico statico, che di carico dinamico. La prima applicazione ha riguardato la riproduzione della risposta sperimentale di un pilone da ponte tozzo testato nel laboratorio ELSA [85]; è stato effettuato anche un confronto dei risultati numerici con i dati di prova di un pilone

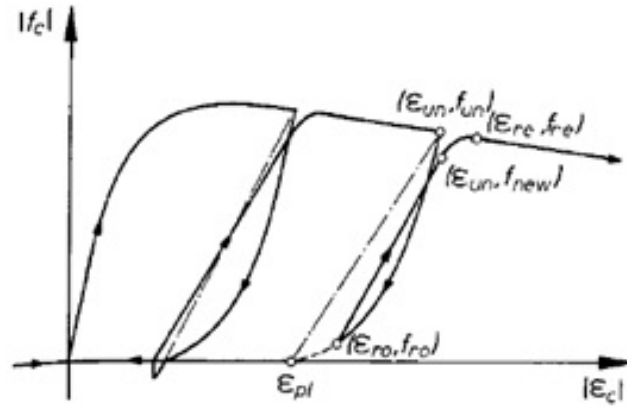


Figura 1.18: modello costitutivo del calcestruzzo

da ponte a sezione circolare sottoposto a carico ciclico laterale di tipo pseudo-statico [9]. Alcuni risultati derivanti da tale verifica sono mostrati in figura 1.19. Inoltre, le analisi dinamiche sono state eseguite su un telaio di un piano e ad una sola campata soggetta al set di accelerazioni del terremoto di El Centro, come descritto in Ranzo e Petrangeli [89].

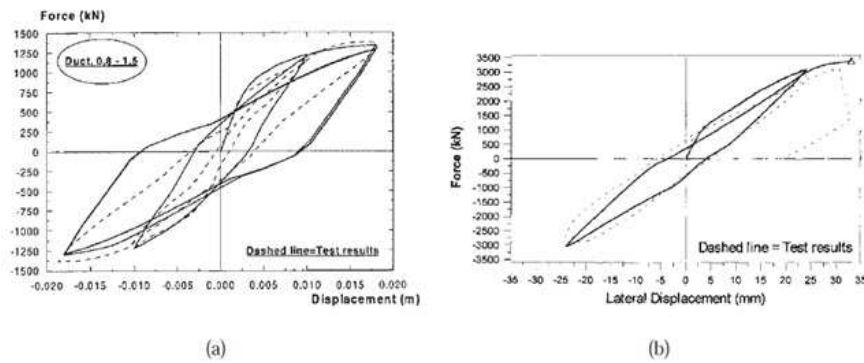


Figura 1.19: curva carico-spostamento per (a) pila da ponte ELSA, (b) pila San Diego in scala reale [89]

Modello Costitutivo

Analogamente ad altre strategie di modellazione basate sul modello strut-and-tie descritto in precedenza, la resistenza al taglio è stata ottenuta come somma di componenti indipendenti (contributo del calcestruzzo dipendente dalla duttilità e meccanismo a traliccio costituito dal rinforzo trasversale), come proposto da Priestley [88]. Il modello di taglio agisce in serie con quella flessionale, senza accoppiamento diretto tra sforzo assiale, momento flettente e taglio, così come è evidenziato dai coefficienti della matrice di rigidezza illustrata in precedenza. Tuttavia alcune delle ipotesi alla base della formulazione generale, sono basate

su considerazioni empiriche non necessariamente basate su presupposti teorici nè validati sperimentalmente.

Innanzitutto, la posizione dei puntoni equivalenti (figura 1.17) è condizionata dal presupposto che la forza assiale N può essere assunta parallela all'acciaio trasversale, una opzione che gli autori giustificano con il fatto che in questo modo la configurazione del sistema proposto è in grado di riprodurre la corretta sequenza di fenomeni di danno che si verificano in seguito all'incremento dei valori della forza di taglio. Successivamente, la formulazione si basa sul presupposto che l'angolo di cracking ϕ assume un valore medio costante (30° o 45°), mentre il contributo delle barre longitudinali del meccanismo a traliccio è un valore stimato dall'autore. Si osserva inoltre che la curva primaria della relazione isteretica a taglio è stata calibrata utilizzando un modello di traliccio non lineare, mentre un criterio semplificato di danno basato sulla duttilità è stato usato per tenere in conto il degrado della curva ($V - \gamma$) dovuta all'interazione di flessione e taglio, come suggerito da Priestley [88].

Una procedura di calibrazione è quindi necessaria per ciascun caso e per ciascun elemento strutturale da analizzare, con la conseguenza che prove sperimentali ad hoc devono essere eseguite ogni volta che un diverso elemento deve essere modellato, limitando così notevolmente l'impiego di un tale modello in applicazioni generali. Dalla verifica numerica sopra descritta, si è osservato che poche informazioni sono date sul comportamento post-picco degli elementi che vanno in crisi, vedi figura 1.19(b), osservazione confermata dagli autori. Inoltre, i miglioramenti nelle previsioni della risposta fornite da questo elemento tagliente a fibre, cfr. figura 1.19(a), rispetto alla sua controparte di sola flessione (b), sembra essere relativamente ridotto o trascurabile.

1.4 Elemento a fibre basato sul modello di Micropiano

La famiglia di modelli con micropiani [2, 3, 4] è basata su un vincolo cinematico che mette in relazione le deformazioni esterne con quelle relative a piani interni selezionati, e sul monitoraggio di semplici relazioni tensione-deformazione su questi piani. Lo stato di ogni micropiano è caratterizzato da deformazioni normali, con componenti deviatoriche e volumetriche, deformazioni angolari, ciò che ne rende possibile l'adattamento a qualsiasi valore del rapporto di Poisson. Questo approccio permette la descrizione della risposta multiassiale attraverso le combinazioni di modelli costitutivi uniassiali.

1.4.1 Strategia di modellazione di Petrangeli

Formulazione dell'elemento

Petrangeli ed altri [80, 82, 83] hanno sviluppato un elemento a fibre basato sull'approccio in flessibilità per modellare il comportamento a taglio e la sua interazione con la forza assiale e momento flettente in travi e pilastri in calcestruzzo. Questa formulazione conduce ad un elemento $2D$ con due nodi. I vettori deformazione e tensione della sezione sono:

$$\mathbf{q}(\xi) = \{\varepsilon_0(\xi), \gamma_0(\xi), \chi_0(\xi)\}^T \text{ e } \mathbf{p}(\xi) = \{\mathbf{N}(\xi), \mathbf{V}(\xi), \mathbf{M}(\xi)\}^T \quad (1.20)$$

dove $\xi = \frac{x}{l}$ è l'ascissa normalizzata, $\varepsilon_0(\xi)$ è deformazione assiale dell'asse della trave, $\chi(\xi)$ è la curvatura della sezione, $\gamma(\xi)$ è la deformazione a taglio dell'asse della trave, \mathbf{N} , \mathbf{M} , \mathbf{V} sono sforzo normale, momento flettente e forza di taglio, associati alla forza assiale e di estremità \mathbf{N}_j , ed ai momenti flettenti \mathbf{M}_i e \mathbf{M}_j attraverso le stesse funzioni di forma per le tensioni descritte nel paragrafo 1.3.3 (figura 1.15). Anche in questo caso viene utilizzata una procedura iterativa per ottenere il vettore $\mathbf{q}(\xi)$ [82, 83] che è incognito a causa dei valori nodali assegnati per l'elemento.

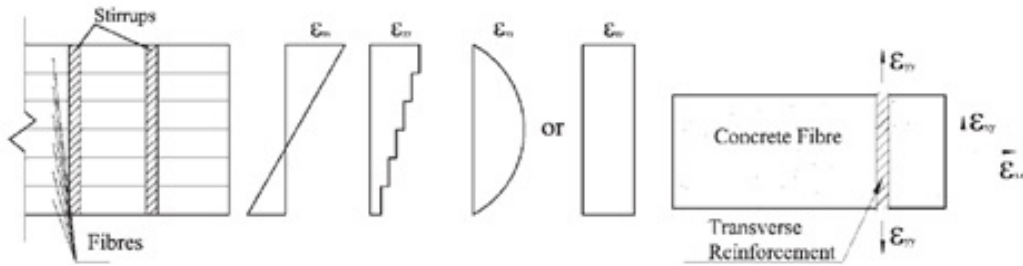


Figura 1.20: Meccanismi di sezione e di fibre [82, 83]

Verifica

L'ipotesi di sezione piana è stata adottata per la determinazione del campo di deformazione longitudinale, ε_{xx} . Per il campo di scorrimenti angolari, gli autori hanno utilizzato diverse funzioni di taglio predefinite: l'ipotesi classica di Timoshenko con uno scorrimento angolare costante lungo la sezione, e una distribuzione parabolica (figura 1.20), affermando che entrambe le funzioni di forma sono state testate con risultati altrettanto accettabili.

Al fine di trovare la deformazione in direzione trasversale, ε_{yy} , è stato imposto l'equilibrio nella direzione laterale tra cemento e acciaio per ciascuna fibra di cemento. Pertanto, un vettore deformazione completo $\{\varepsilon(\xi), \gamma(\xi), \chi(\xi)\}^T$, è derivato iterativamente in ogni fibra.

Conoscendo il vettore deformazione, un modello costitutivo biassiale deve essere introdotto per descrivere il comportamento del cemento.

Per l' i -esima fibra di calcestruzzo, viene derivata una relazione incrementale costitutiva dalla condensazione statica del grado di libertà nella direzione y trasversale:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{xx}^i \\ d\sigma_{xy}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a^i & K_{as}^i \\ K_{sa}^i & K_s^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{xx}^i \\ d\varepsilon_{xy}^i \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

dove i coefficienti di rigidità assiale K_a^i e tagliante K_s^i della fibra, nonché quelle di accoppiamento K_{as}^i , K_{sa}^i sono calcolate come

$$\begin{cases} K_a^i = (D_{11}^i - D_{12}^i D_{21}^i \alpha^i), \\ K_s^i = (D_{33}^i - D_{23}^i D_{32}^i \alpha^i), \\ K_{as}^i = (D_{13}^i - D_{12}^i D_{23}^i \alpha^i), \\ K_{sa}^i = (D_{31}^i - D_{32}^i D_{21}^i \alpha^i), \end{cases} \quad (1.22)$$

con α^i percentuale di armatura trasversale, e D_{mn}^i coefficienti della matrice del materiale della fibra i -esima.

Modelli Costitutivi

Come relazioni costitutive biassiali per il calcestruzzo, l'autore ha scelto un modello modificato di micropiano, che collega l'approccio a micropiani ed un legame monoassiale rotante. In particolare, nel modello modificato, sono monitorate solo le componenti normali al micropiano. Le deformazioni sono suddivise in componenti “deboli” e “forti” lungo le direzioni principali di deformazione. Quindi, le tensioni nel materiale si trovano, per le due componenti, utilizzando il comportamento costitutivo del micropiano:

$$s_k^w = s(e_k^w); \quad s_k^s = C_k^s e_k^s; \quad (1.23)$$

per il k -esimo micropiano.

Per la componente debole del micropiano, è stato utilizzato un modello costitutivo dovuto a Mander [52], mentre è stato assunto un comportamento elastico lineare per la componente forte. Valgono le seguenti relazioni per le deformazioni ε_k la tensione σ_k :

$$\varepsilon_k = e_k^w + e_k^s; \quad \sigma_k = s_k^w + s_k^s; \quad (1.24)$$

Il tensore di tensione $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T$ si ottiene infine usando il principio dei lavori virtuali. La matrice costitutiva della fibra di calcestruzzo D si trova utilizzando una forma

incrementale delle leggi costitutive nella (1.23). Entrambe le matrici σ e D devono essere valutate numericamente controllando un numero adeguato di micropiani (di solito otto). Il legame tensione-deformazione delle fibre di acciaio longitudinali è descritto dal modello di Menegotto e Pinto [63].

Verifica

L'elemento a fibre è stato implementato nel programma E.F.FIBRE (Petrangeli e Ciampi, [79]), e il legame costitutivo del calcestruzzo era stato prima verificato mediante il test di compressione uniassiale di van Mier [111], nonché con i risultati del test di Kupfer e Gerstle [48] relativi all'involuppo di condizioni di crisi biassiale. Applicazioni numeriche del tipo ciclico-statico relative alla pila da ponte in c.a. testata al laboratorio ELSA, descritte in precedenza, sono riportate in figura 1.21. Una ulteriore simulazione utilizza i risultati sulle pile da ponte testate presso l'Università di Roma in condizioni di carico statico (De Sortis e Nuti, [28]). E' stato effettuato anche un confronto con i dati sperimentali di travi di piccole dimensioni, testati da Kawano e Watanabe [43], per indagare sulla capacità del modello di prevedere la rottura per taglio delle travi sottoposte a flessione quattro punti. Inoltre, sono state effettuate prove dinamiche con riferimento ad uno dei piloni in c.a. della superstrada Hanshin sottoposto alla componente Kaiyou Weather Bureau NS, come descritta in [83].

Proprietà del modello

L'originalità di questo modello rispetto a quelli descritti nelle sezioni precedenti è l'introduzione di una legge costitutiva biassiale basata su un approccio modificato per il micropiano per la riproduzione di carico monotono e ciclico. A causa dell'uso di una relazione costitutiva biassiale, questa formulazione porta ad un modello avanzato, che è in grado di descrivere in modo più coerente il comportamento di elementi c.a. senza bisogno di ricorrere alla sovrapposizione di modelli distinti.

Verifica

Tuttavia, il carattere estremamente intrinseco del modello lo rende più difficilmente collegabile con i diversi meccanismi che contribuiscono alla resistenza al taglio. Infatti, l'autore riporta carenze nell'introduzione dell'effetto spinotto nonché degli spostamenti relativi tra le superfici di calcestruzzo relative a fessure di notevole dimensioni. Inoltre, secondo l'autore, il metodo potrebbe tendere a sottostimare la resistenza a taglio delle regioni in cui una parte significativa del carico è sopportata dall'azione diretta del puntone, poichè gli effetti locali di carico e di

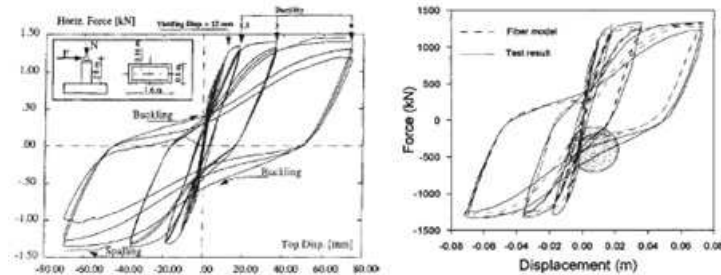


Figura 1.21: curva carico-spostamento della pila da ponte ELSA: (a) risultati sperimentali [85] e (b) valutazione numerica [82]

vincolo non possono essere stimati con la formulazione proposta. L'estensione ai modelli più grandi delle buone capacità predittive della resistenza al taglio ottenuti per travi in c.a. di piccole dimensioni senza armatura d'anima, può richiedere la definizione di più appropriate leggi costitutive. Infine, la complessità computazionale del modello dovrebbe anche avere un leggero effetto deterrente in termini di implementazione in altri codici di analisi strutturale, soprattutto considerando che il tensore delle tensioni e la matrice costitutiva delle fibre di calcestruzzo deve essere numericamente valutata per ogni fibra e per ogni passo di carico.

1.5 Elemento trave-colonna in fibra usato nei modelli di rottura diffusa (smeared)

In questo approccio, il calcestruzzo danneggiato è simulato mediante un mezzo continuo con caratteristiche anisotrope. In generale, questi modelli sono indicati come “approcci a rottura diffusa” (smeared cracks approaches) poiché la fessurazione (cracking) viene modellata come un effetto distribuito con direzionalità. Questi approcci sono particolarmente adatti per l'analisi sezionale sotto carichi combinati, come spiegato nelle sezioni seguenti.

1.5.1 Strategia di modellazione di Vecchio e Collins

Formulazione sezionale

Vecchio e Collins [117] hanno presentato il metodo di “analisi delle sezioni duali” (dual-section analysis) per prevedere la risposta di una trave c.a. soggetta ad azione e deformazione da taglio; gli autori hanno sviluppato solo un modello sezionale, senza introdurre la formulazione agli elementi finiti. La sezione di trave è discretizzata in strati come mostrato in figura 1.22. L'unica condizione di compatibilità della sezione è che le sezioni rimangono piane. La formulazione è chiamata analisi della sezione “duale” poiché il calcolo delle tensioni da taglio,

eq. 1.25, è fornita dalla differenza finita del valore di tensione normale su ciascun lato di uno strato di lunghezza finita (Fig. 1.22a):

$$\tau_{xy}(x) = -\frac{1}{b(y)} \int_{-y_b}^y \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} b(y) dy \quad \text{dove} \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \approx \frac{\sigma_{xx}(x_2) - \sigma_{xx}(x_1)}{S} \quad (1.25)$$

dove b è la larghezza della sezione, y_b è la coordinata dello strato inferiore, $\sigma_{xx}(x_2)$ e $\sigma_{xx}(x_1)$ sono le tensioni normali dello strato nelle due sezioni analizzate, a distanza $S = H/6$, (con H altezza della trave).

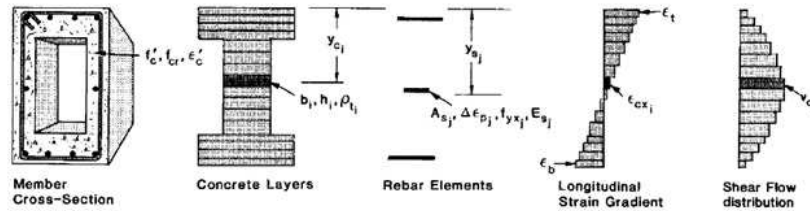


Figura 1.22: discretizzazione delle sezione della trave; sono richieste la stima del gradiente longitudinale delle deformazioni e del flusso di tensione nella sezione

Verifica

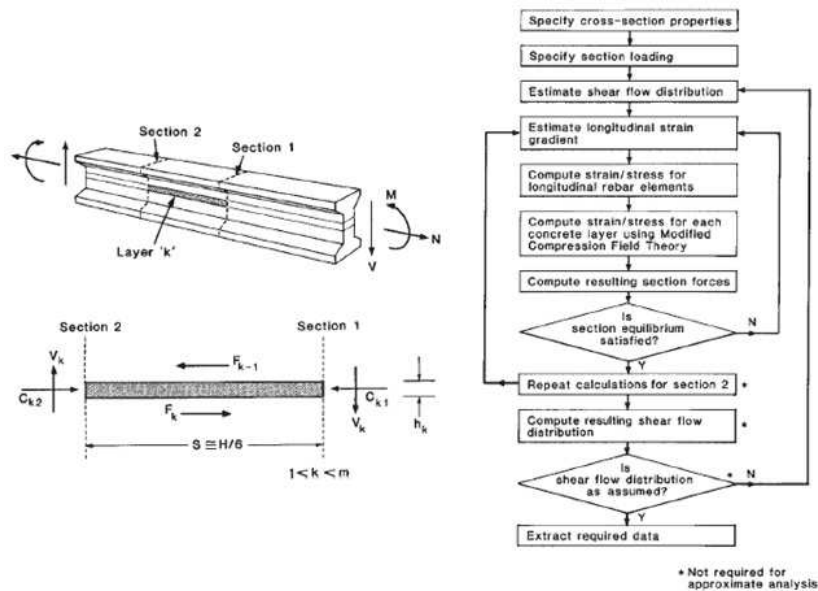


Figura 1.23: analisi della sezione duale: (a) schema e diagramma del corpo libero per lo strato K di calcestruzzo, e (b) procedura di soluzione per l'analisi della trave.

La procedura di soluzione per il modello sezionale è data nel diagramma di flusso di figura 1.23. Poiché questo modello analitico richiede un non trascurabile sforzo computazionale, Vecchio e Collins hanno proposto due soluzioni alternative e approssimate basate su un

flusso costante delle tensioni tangenziali o una di tipo parabolico. L'uso di una di queste due analisi alternative implica l'eliminazione delle iterazioni sulle stime del flusso delle tensioni tangenziali (indicato con un asterisco nel diagramma di flusso di figura 1.23). Come notato dagli autori, la procedura approssimata conduce a risultati, in termini di comportamento globale della trave, che sono molto vicini a quelli ottenuti utilizzando il più rigoroso approccio "duale" nell'analisi della sezione. Tuttavia l'assunzione parabolica della deformazione da taglio sovrastima gli sforzi di taglio nella zona di compressione della sezione (previsione non conservativa), mentre l'assunzione costante del flusso di taglio sovrastima le tensioni da taglio nella regione di tensione (risultati conservativi).

Modello Costitutivo

La *Modified Compression Field Theory (MCFT)* è stata adottata come legge costitutiva per il modello di sezione. In questa prima formulazione (Vecchio e Collins, [113]) si può riprodurre solo il carico monotono. In due decenni, tuttavia, modifiche ed estensioni del *MCFT* sono state introdotte, con formulazioni per carico ciclico e simulazioni numeriche su pannelli quadrati in c.a. e pareti di taglio, (Vecchio [118], Palermo e Vecchio, [73]). Tuttavia, nessuna applicazione a travi soggette a carichi ciclici è stata finora presentata.

Secondo la MCFT, il calcestruzzo fessurato è trattato come un materiale ortotropo con i suoi assi principali (1, 2) corrispondenti alle direzioni principali medie di trazione (direzioni delle fessure), come mostrato in figura 1.24. Le leggi costitutive per calcestruzzo e acciaio sono state ottenute da prove sperimentali condotte presso l'Università di Toronto (Vecchio e Collins, [112]) per i provini di pannello e lastre (figura 1.25).

Verifica

Questo modello di analisi in sezione è stato implementato nel codice di calcolo SMAL (Vecchio e Collins, [112]) e poi impiegato per prevedere la resistenza a taglio di svariate travi testate presso l'Università di Toronto (Vecchio e Collins, [112]), presso l'Università di Washington (Haddadin e altri, [38]), e alla Cornell University (Elzanaty e altri [29]) in condizioni di carico monotono.

Caratteristiche del Modello

Il modello sezionale sviluppato da Vecchio e Collins si basa su procedure iterative per determinare lo stato tensionale e le distribuzioni di deformazione. Gli autori suggeriscono di trovare il campo di scorrimento angolare della sezione a partire dall'equilibrio di due sezioni

adiacenti. Il modello sezionale ha dato risultati soddisfacenti se applicato a sezioni di trave soggette a carichi monotoni. L'approccio può essere considerato come non locale poiché la risposta della sezione dipende da informazioni esterne al piano geometrico della sezione. Quindi, se questo regime dovesse essere attuato nell'ambito dell'analisi di un telaio, dovrebbe essere sviluppata una formulazione speciale dell'elemento, coinvolgendo, per il caso di un elemento $2D$ schematicamente illustrato in figura 1.26, la presenza di almeno tre punti di Gauss per flessione (punti 1, 2, e 3, ciascuno con un gradiente di deformazione longitudinale) e due per taglio (punti $2a$ e $2b$, con una distribuzione delle tensioni tangenziali).

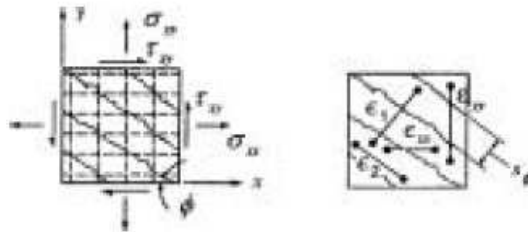


Figura 1.24: tensioni, deformazioni e fessure diffuse nel modello MCFT (Vecchio e Collins, [114])

Oltre all'aggiunta della complessità suddetta, una limitazione importante di questo modello è la procedura iterativa richiesta per determinare le deformazioni (in particolare, per il gradiente di deformazione longitudinale), che si basa sulla successione di piccoli incrementi o decrementi delle deformazioni ai valori inizialmente assunti. L'introduzione di una analisi sezionale iterativa così complessa all'interno di un codice agli elementi finiti per l'analisi non lineare di strutture intelaiate è probabilmente irrealizzabile.

Un'analisi sezionale "duale" simile a questa è stata attuata in un elemento a trave in Ranzo [90]. L'analisi sezionale "duale" comporta altresì difficoltà nel valutare accuratamente il profilo di tensioni tangenziali nelle due sezioni in modo numericamente stabile Bentz, [8]. Infatti, il metodo richiede che le due sezioni siano valutate in corrispondenza di due valori sostanzialmente identici di taglio e sforzo normale, per evitare instabilità numeriche. Anche una piccola differenza nella forza assiale tra le due sezioni implica che il profilo risultante delle tensioni tangenziali potrebbe non annullarsi sul lato superiore o inferiore della sezione, come richiesto per l'equilibrio. Inoltre, le discontinuità nel profilo delle tensioni tangenziali possono essere previste per diverse profondità di fessurazione delle due sezioni analizzate a causa di momenti differenti.

Per superare queste difficoltà, Vecchio e Collins [114], hanno proposto l'uso di un vincolo cinematico, mediante l'introduzione di un prefinito sforzo di taglio o distribuzione delle

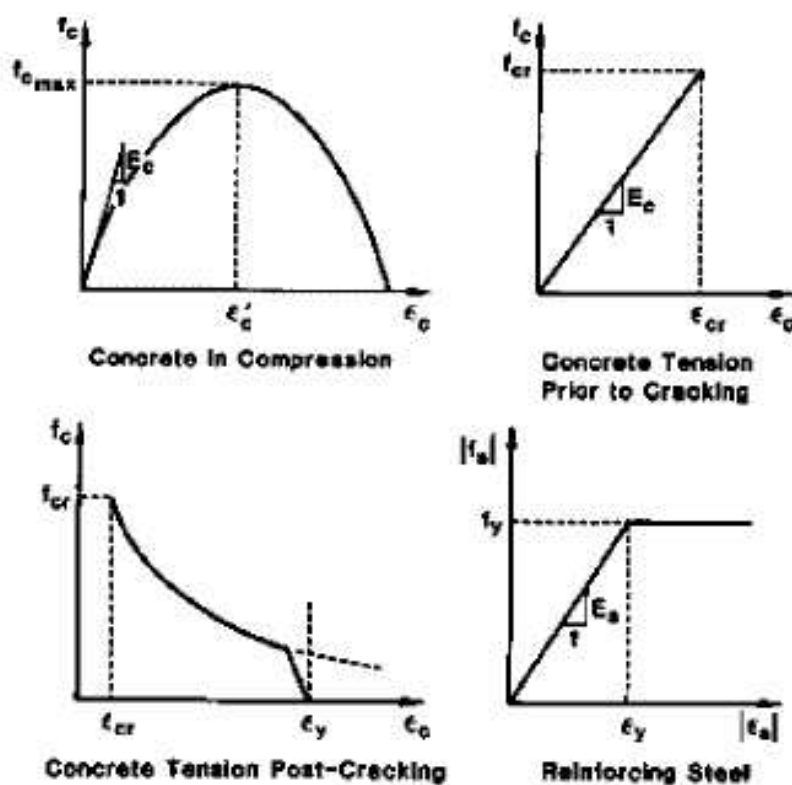


Figura 1.25: Relazioni costitutive per il cemento (in compressione e trazione) e le armature (Vecchio e Collins, [114])

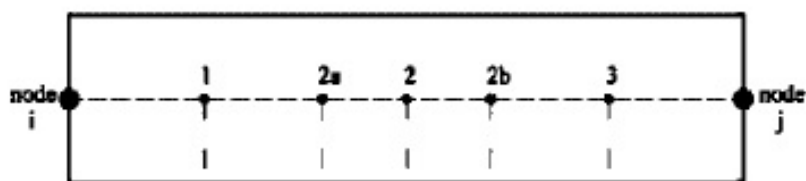


Figura 1.26: Analisi della sezione duale in un elemento 2D, [5]

sollecitazione di taglio, nella definizione del profilo di taglio. Questo rende la procedura più stabile e semplice, anche se in questo modo la tensione tangenziale non può soddisfare equilibrio della sezione (a causa del profilo aperto della tensione tangenziale); tuttavia tale approssimazione è considerata dagli autori come coerente con l'approssimazione complessiva della modellazione di trave.

Questo modello sezionale è stato implementato in un programma open-source da Vecchio e Collins [114], facilitando così notevolmente l'accesso alla sua formulazione. Le simulazioni numeriche hanno evidenziato ottime previsioni della resistenza rispetto ai risultati sperimentali, con l'eccezione di quelle travi che non dispongono di armatura a taglio, una tendenza generale in applicazioni del MCFT. Per superare questa limitazione (minore accuratezza per travi con comportamento critico a taglio in presenza di scarsa o nulla armatura trasversale), Vecchio [119] ha introdotto un nuovo modello concettuale per descrivere il comportamento di rottura del cemento armato il *Disturbed Stress Field Model*. Infine, poichè la procedura analitica utilizza un modello sezionale basato sull'ipotesi che le sezioni piane restano piane, non è in grado di predire gli effetti locali presenti nelle zone di carico e di vincolo.

Capitolo 2

Formulazione dell'elemento e determinazione degli effetti dei carichi applicati

2.1 Ipotesi

Si richiamano brevemente nel seguito le ipotesi cinematiche che caratterizzano il modello di Eulero-Bernoulli utilizzato nello sviluppo dell'elemento finito basato sulla formulazione alle forze [102, 103, 104, 105, 106, 33, 34]

Il riferimento locale dell'elemento è composto da un asse x coincidente con l'asse dell'elemento, mentre la sezione, giace nel piano $y - z$.

Ogni sezione dell'elemento può traslare e ruotare, mentre gli spostamenti

Gli spostamenti nodali dell'elemento sono definiti attraverso il vettore:

$$\mathbf{d}^e = [\mathbf{d}_{x1}^e, \mathbf{d}_{y1}^e, \mathbf{d}_{z1}^e, \phi_{x1}^e, \phi_{y1}^e, \phi_{z1}^e, \mathbf{d}_{x2}^e, \mathbf{d}_{y2}^e, \mathbf{d}_{z2}^e, \phi_{x2}^e, \phi_{y2}^e, \phi_{z2}^e] \quad (2.1)$$

dove \mathbf{d} e ϕ sono rispettivamente gli spostamenti e le rotazioni nei nodi 1 e 2 dell'elemento.

Le deformazioni generalizzate della sezione s dell'elemento derivano dagli spostamenti nodali e sono:

$$\boldsymbol{\epsilon}^s = [\boldsymbol{\epsilon}^s, \boldsymbol{\theta}'^s, \boldsymbol{\chi}_y^s, \boldsymbol{\chi}_z^s] \quad (2.2)$$

dove $\boldsymbol{\epsilon}^s$ è la deformazione assiale, $\boldsymbol{\theta}'^s$ è l'angolo di torsione per unità di lunghezza, e $\boldsymbol{\chi}^s = [\boldsymbol{\chi}_y^s, \boldsymbol{\chi}_z^s]$ è la curvatura. Il valore raggiunto dalle componenti della deformazione dipende dalla particolare sezione dell'elemento, quindi sono funzione di \mathbf{x} : qui, tale dipendenza è

omessa per semplificare la notazione. Nel seguito verrà usato un apice s per indicare che la quantità relativa è connessa ad una generica sezione trasversale dell'elemento, quindi resta sottointesa la loro dipendenza su \mathbf{x} .

Le forze risultanti applicate nei nodi dell'elemento, derivano dagli spostamenti nodali e sono:

$$\mathbf{f}^e = [\mathbf{f}_{x1}^e, \mathbf{f}_{y1}^e, \mathbf{f}_{z1}^e, \mathbf{m}_{x1}^e, \mathbf{m}_{y1}^e, \mathbf{m}_{z1}^e, \mathbf{f}_{x2}^e, \mathbf{f}_{y2}^e, \mathbf{f}_{z2}^e, \mathbf{m}_{x2}^e, \mathbf{m}_{y2}^e, \mathbf{m}_{z2}^e] \quad (2.3)$$

dove \mathbf{f} sono le forze e \mathbf{m} sono le coppie. Le tensioni generalizzate della sezione trasversale s dell'elemento (duale alle deformazioni generalizzate) sono:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = [N^s, T^s, M_y^s, M_z^s] \quad (2.4)$$

dove N^s è lo sforzo normale, T^s è la torsione, $M^s = [M_y^s, M_z^s]$ è il momento flettente; questi possono essere calcolati solo attraverso l'equilibrio una volta noti gli \mathbf{f}^e

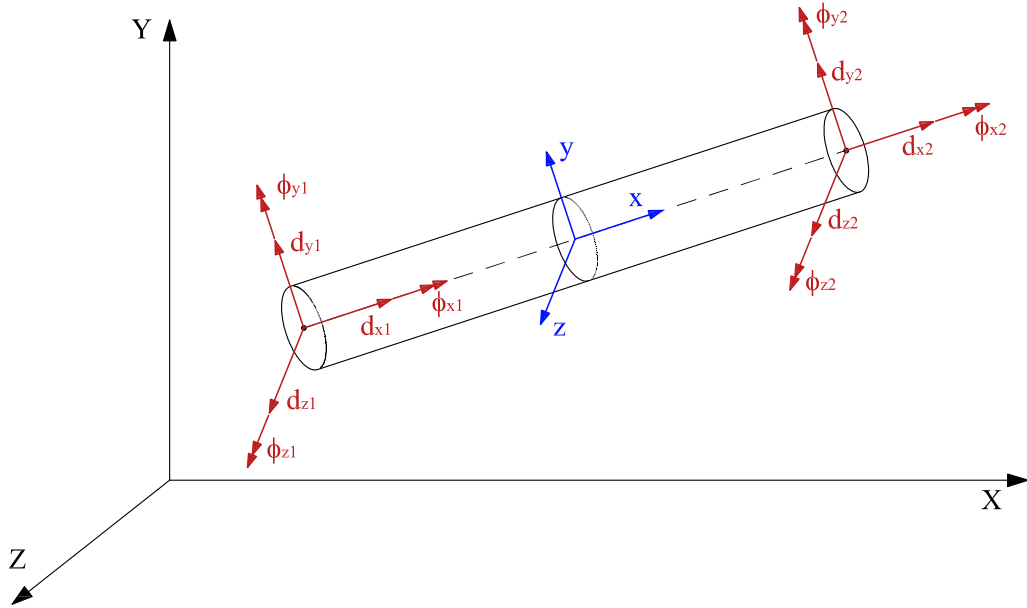


Figura 2.1: Spostamenti nodali agenti sull'elemento

2.2 Cambio di riferimento

Il riferimento globale della in cui è definito il modello strutturale, ha origine in \mathbf{O} e assi \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} la cui base è composta dai vettori $\mathbf{e}_x = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_y = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{e}_z = [0, 0, 1]^T$.

Per definire il riferimento locale dell'elemento, si è utilizzato un vettore di riferimento dell'elemento \mathbf{r}^e di lunghezza unitaria per orientare la sezione trasversale dell'elemento rispetto all'asse \mathbf{x} . Si presume che \mathbf{y} appartiene al piano definito dall'asse \mathbf{x} e il vettore di riferimento dell'elemento, così la base del sistema di riferimento locale viene valutata come:

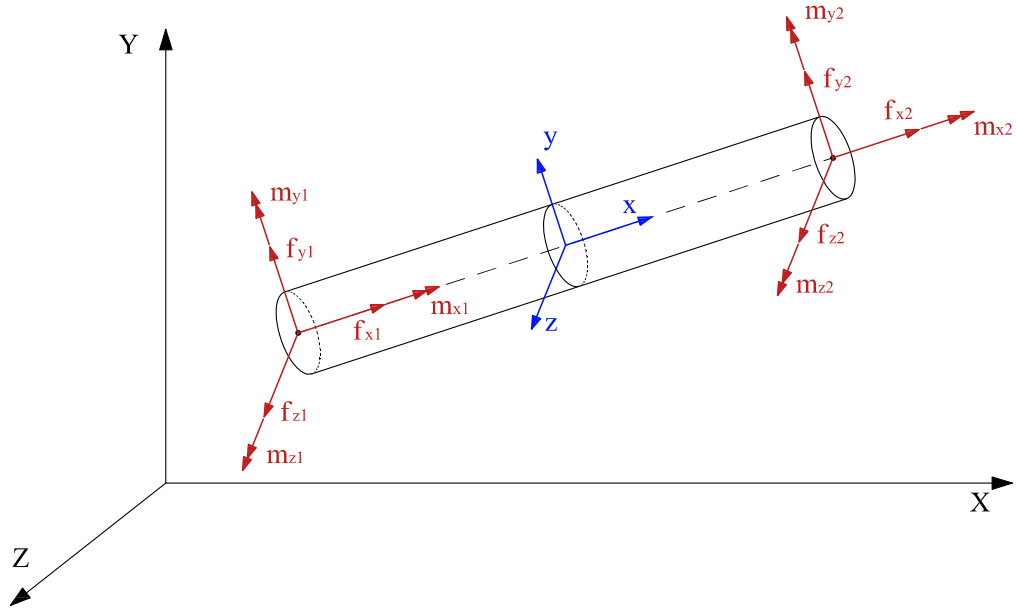


Figura 2.2: Forze nodali agenti sull'elemento

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x^e &= \frac{\mathbf{r}_2^e - \mathbf{r}_1^e}{|\mathbf{r}_2^e - \mathbf{r}_1^e|} \\
 \mathbf{e}_z^e &= \mathbf{e}_x^e \times \mathbf{r}^e \\
 \mathbf{e}_y^e &= \mathbf{e}_z^e \times \mathbf{e}_x^e
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove \mathbf{r}_1^e e \mathbf{r}_2^e sono le coordinate dei nodi dell'elemento \mathbf{e} , mentre \times rappresenta il prodotto vettoriale.

Gli spostamenti nodali degli elementi e le forze resistenti sono legati agli spostamenti e forze nodali mediante un cambiamento di riferimento tra quello dell'elemento ed il riferimento globale. Il passaggio tra i due riferimenti, avviene mediante la matrice di cambio riferimento \mathbf{R}^e :

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_r^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_r^e \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

che è composto della matrice \mathbf{R}_r^e che esprime la trasformazione tra riferimento globale e

quello locale della trave e viene valutato come:

$$\mathbf{R}_r^e = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x^e & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y^e & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z^e \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x^e & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y^e & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z^e \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x^e & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y^e & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z^e \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La trasformazione dal riferimento globale a quello locale, viene utilizzato per ottenere lo spostamento nodale dell'elemento, dallo stesso spostamento dei due nodi espresso nel riferimento globale:

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{d}_g^e \quad (2.8)$$

Analogamente prima di assemblare l'elemento, il vettore delle forze resistenti \mathbf{f}^e viene trasformato nel riferimento globale:

$$\mathbf{f}_g^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (2.9)$$

La stessa trasformazione viene eseguita anche sulla matrice di rigidezza dell'elemento, che viene valutata nel riferimento locale e poi trasformata nel riferimento globale:

$$\mathbf{K}_g^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^e \quad (2.10)$$

2.3 Eliminazione dei moti di corpo rigido

Nell'approccio alle forze è necessario calcolare la matrice di flessibilità dell'elemento, mediante inversione della sua matrice di rigidezza; per un elemento libero nello spazio, essa risulta essere singolare e quindi non invertibile. Per tale motivo è necessario eliminare i moti di corpo rigido della trave. Quest'ulteriore trasformazione, relativa agli spostamenti nodali, alle forze ed alle matrici di rigidezza, è eseguita, mediante una matrice di trasformazione \mathbf{T}^e , ottenuta considerando l'elemento come una trave appoggiata appoggiata, nella sua configurazione finale.

Eliminando gli atti di moto rigido, si ha un sistema con solo sei gradi di libertà; in tal modo la matrice $\mathbf{K}_{12 \times 12}^e$ diventa la matrice $\bar{\mathbf{K}}_{6 \times 6}^e$, priva di atti di moto rigido e invertibile. I vettori di spostamenti e forze nodali diventano:

$$\bar{\mathbf{d}}^e = [\bar{\mathbf{d}}_x^e, \bar{\phi}_x^e, \bar{\phi}_{y1}^e, \bar{\phi}_{z1}^e, \bar{\phi}_{y2}^e, \bar{\phi}_{z2}^e] \quad (2.11)$$

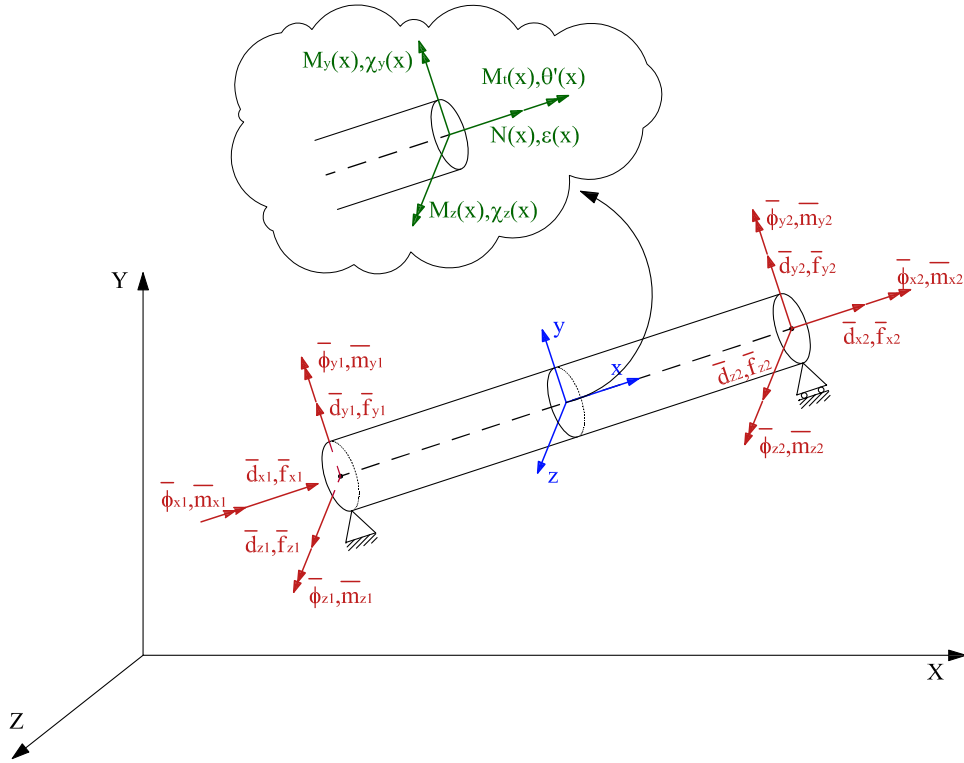


Figura 2.3: Elemento privo di moto rigido

e

$$\bar{\mathbf{f}}^e = [\bar{\mathbf{f}}_x^e, \bar{\mathbf{m}}_x^e, \bar{\mathbf{m}}_{y1}^e, \bar{\mathbf{m}}_{z1}^e, \bar{\mathbf{m}}_{y2}^e, \bar{\mathbf{m}}_{z2}^e,] \quad (2.12)$$

Gli spostamenti \mathbf{d}^e sono anche detti spostamenti di deformazione perchè costituiscono gli spostamenti relativi che producono le deformaioni. Osservando la deformata dell'elemento nel piano x-y, in figura(2.4), si ricavano gli spostamenti che producono la curvatura χ_y nei nodi 1 e 2:

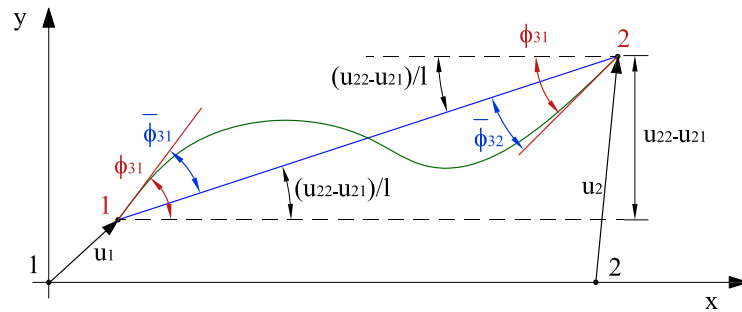


Figura 2.4: Spostamenti di deformazione nel piano x-y

$$\bar{\phi}_{31} = \phi_{31} - \frac{u_{22} - u_{21}}{l} \quad (2.13)$$

$$\bar{\phi}_{32} = \phi_{32} - \frac{u_{22} - u_{21}}{l} \quad (2.14)$$

Dove l è la lunghezza dell'elemento e u_1 e u_2 sono i vettori spostamento del primo e secondo nodo. Osservando invece la deformata dell'elemento nel piano x-z, in figura(2.5), si ricavano gli spostamenti che producono la curvatura χ_z nei nodi 1 e 2:

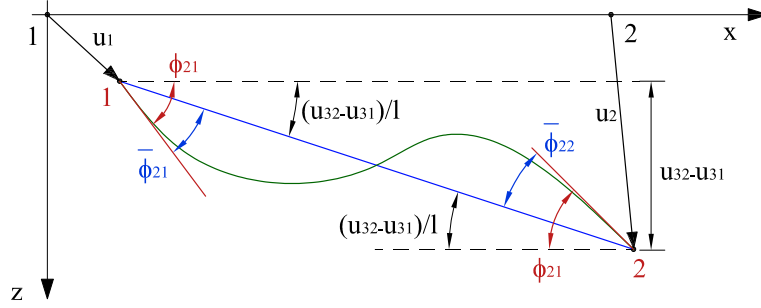


Figura 2.5: Spostamenti di deformazione nel piano x-z

$$\bar{\phi}_{21} = \phi_{21} - \frac{u_{32} - u_{31}}{l} \quad (2.15)$$

$$\bar{\phi}_{22} = \phi_{22} - \frac{u_{32} - u_{31}}{l} \quad (2.16)$$

dove l è la lunghezza dell'elemento, u_1 e u_2 sono i vettori spostamento del primo e del secondo nodo. Gli spostamenti che producono deformazioni assiali e torcenti sono invece:

$$\bar{u}_1 = u_{12} - u_{11} \quad (2.17)$$

$$\bar{\phi}_1 = \phi_{12} - \phi_{11} \quad (2.18)$$

Si ricava che i due vettori di spostamento (2.1) e (2.11) sono legati dalla relazione:

$$\bar{d}^e = T^e d^e \quad (2.19)$$

La matrice di trasformazione T^e è:

$$T^e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/l^e & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/l^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l^e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/l^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/l^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l^e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/l^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/l^e & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Osservando la figura (2.6) da relazioni di equilibrio, nel piano x-y si ottengono le azioni prodotte da \bar{m}_{31} e \bar{m}_{32} :

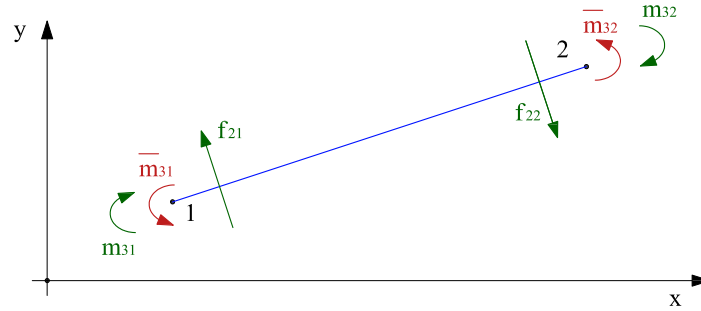


Figura 2.6: Azioni prodotte da \bar{m}_{31} e \bar{m}_{32} nel piano x-y

$$f_{21} = \frac{\bar{m}_{31}}{l} + \frac{\bar{m}_{32}}{l} \quad (2.21)$$

$$f_{22} = -\frac{\bar{m}_{31}}{l} - \frac{\bar{m}_{32}}{l} \quad (2.22)$$

$$m_{31} = \bar{m}_{31} \quad (2.23)$$

$$m_{32} = \bar{m}_{32} \quad (2.24)$$

dove l è la lunghezza dell'elemento. Osservando, invece la figura (2.7) da relazioni, nel piano 1-3 si ottengono le azioni prodotte da \bar{m}_{21} e \bar{m}_{22} :

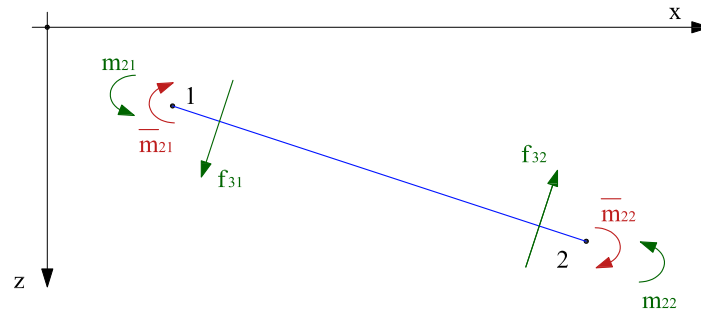


Figura 2.7: Azioni prodotte da \bar{m}_{21} e \bar{m}_{22} nel piano x-z

$$f_{31} = \frac{\bar{m}_{21}}{l} + \frac{\bar{m}_{22}}{l} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{f}_{32} = -\frac{\bar{\mathbf{m}}_{21}}{l} - \frac{\bar{\mathbf{m}}_{22}}{l} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{m}_{21} = \bar{\mathbf{m}}_{21} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{m}_{22} = \bar{\mathbf{m}}_{22} \quad (2.28)$$

dove l è la lunghezza dell'elemento. Inoltre per l'azione assiale e torcente

$$\mathbf{f}_{11} = -\bar{\mathbf{f}}_1 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{f}_{12} = \bar{\mathbf{f}}_1 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{m}_{11} = -\bar{\mathbf{m}}_1 \quad (2.31)$$

$$\mathbf{m}_{12} = -\bar{\mathbf{m}}_1 \quad (2.32)$$

I vettori delle forze (2.3) e (2.12) sono legati dalla relazione:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e \quad (2.33)$$

dove:

Dal principio dei lavori virtuali si ottiene:

$$\mathbf{F}^e \mathbf{f}^e = \mathbf{d}^e \quad (2.34)$$

Utilizzando la (2.33):

$$\mathbf{F}^e \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e = \mathbf{d}^e \quad (2.35)$$

Premoltiplicando per \mathbf{T}^e la (2.35) e utilizzando la (2.33) si ottiene:

$$\mathbf{T}^e \mathbf{F}^e \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{d}}^e \Rightarrow \mathbf{T}^e \mathbf{F}^e \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e = \bar{\mathbf{d}}^e \quad (2.36)$$

La matrice che moltiplicata per $\bar{\mathbf{f}}^e$ restituisce $\bar{\mathbf{d}}^e$ è proprio $\bar{\mathbf{F}}^e$. In definitiva la matrici $\bar{\mathbf{F}}^e$ e \mathbf{F}^e sono legate dalla relazione seguente:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{F}^e \mathbf{T}^{eT} \quad (2.37)$$

Partendo dal principio dei lavori virtuali senza atti di moto rigido e con la matrice di rigidezza, si ricava una relazione analoga tra \mathbf{K}^e e $\bar{\mathbf{K}}^e$

$$\bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}^e = \bar{\mathbf{f}}^e \quad (2.38)$$

Premoltiplicando la (2.38) per \mathbf{T}^{eT}

$$\mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e \quad (2.39)$$

Utilizzando la (2.19) per la (2.32):

$$\mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (2.40)$$

La matrice che moltiplicata per \mathbf{d}^e restituisce \mathbf{f}^e è proprio \mathbf{K}^e . Allora le matrici \mathbf{K}^e e $\bar{\mathbf{K}}^e$ sono legate dalla seguente relazione:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e \quad (2.41)$$

Le relazioni trovate (2.19), (2.32), (2.37) e (2.41) governano le trasformazioni tra i due sistemi, dove \mathbf{d}^e , \mathbf{f}^e , \mathbf{K}^e , \mathbf{F}^e sono rispettivamente i vettori spostamenti nodali, forze nodali, la matrice di rigidezza e flessibilità dell'elemento che includono gli atti di moto rigido, mentre i corrispondenti $\bar{\mathbf{d}}^e$, $\bar{\mathbf{f}}^e$, $\bar{\mathbf{K}}^e$, $\bar{\mathbf{F}}^e$ sono rispettivamente i vettori spostamenti nodali, forze nodali, la matrice di rigidezza e flessibilità dell'elemento senza gli atti di moto rigido. E' importante notare che, mentre $\bar{\mathbf{d}}^e$ viene valutata esplicitamente come una funzione degli spostamenti nodali \mathbf{d}^e , la valutazione di $\bar{\mathbf{f}}^e$ e di $\bar{\mathbf{K}}^e$ deve essere eseguita con la cosiddetta procedura di determinazione dello stato dell'elemento, che verrà descritta nel seguito. La figura (2.3) mostra anche le caratteristiche della sollecitazione e le deformazioni agenti nella generica sezione. Le deformazioni della sezione sono rappresentate da quattro componenti esplicitate nella (2.2). Le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione sono esplicitate nella (2.4). Nell'elemento elaborato l'attenzione è stata focalizzata sul comportamento assiale-flettente, pertanto la relazione tra angolo di torsione e momento torsionale è considerata elastico lineare e disaccoppiata dalla forza assiale e dal momento flettente. Inoltre si precisa che non è stata considerata l'azione tagliente perchè si utilizza il modello di Eulero-Bernoulli, ovvero si fanno le ipotesi di conservazione delle sezioni piane e deformazione da taglio trascurabili. Occorre, quindi descrivere il comportamento non lineare dell'elemento in figura (2.3) con la formulazione alle forze.

2.4 Valutazione delle caratteristiche della sollecitazione

Nella formulazione alle forze, viene eseguita l'interpolazione delle caratteristiche della sollecitazione σ^s ; queste sono espresse come prodotto dell'operatore σ^s contenente le caratteristiche della sollecitazione, indotte da un carico unitario e , di un vettore \bar{f}^e contenente i valori dei carichi applicati:

$$\sigma^s = S^s \bar{f}^e \quad (2.42)$$

$$S^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x/l^e - 1/2 & 0 & x/l^e + 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x/l^e - 1/2 & 0 & x/l^e + 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Come in [67] l'effetto degli elementi dei carichi applicati lungo l'elemento, può essere rappresentato attraverso la definizione di funzioni di interpolazione supplementari ottenuti dall'equilibrio dei carichi che agiscono lungo l'elemento. Mediante il principio dei lavori virtuali (PVW) è possibile mostrare che l'operatore S^s può essere utilizzato anche per valutare gli spostamenti dell'elemento e la matrice di flessibilità:

$$PVW \Rightarrow \int_{l^e} \sigma_v^s \epsilon^s dx = \bar{f}_v^e \bar{d}^e \quad (2.44)$$

dove il pedice v viene usato per indicare le quantità virtuali. Sostituendo la (2.42) nell'equazione precedente si ha:

$$\int_{l^e} S^s \bar{f}_v^e \epsilon^s dx = \bar{f}_v^e \bar{d}^e \Rightarrow \int_{l^e} S^{sT} \epsilon^s dx = \bar{d}^e \quad (2.45)$$

L'equazione precedente vale anche in termini di incrementi:

$$\int_{l^e} S^{sT} \delta \epsilon^s dx = \delta \bar{d}^e \quad (2.46)$$

dove $\delta \epsilon^s$ può essere correlata agli incrementi di sollecitazioni generalizzate $\delta \sigma^s$ per mezzo della matrice di rigidezza della sezione:

$$\delta \sigma^s = K^s \delta \epsilon^s \Rightarrow \delta \epsilon^s = [K^s]^{-1} \delta \sigma^s \quad (2.47)$$

quindi l'equazione (2.46) diventa:

$$\int_{l^e} S^{sT} [K^s]^{-1} \delta \sigma^s dx = \delta \bar{d}^e \quad (2.48)$$

Infine, facendo nuovamente uso di (2.42) si ottiene:

$$\int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} (x) \mathbf{S}^s dx \delta \bar{\mathbf{f}}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \quad (2.49)$$

dove l'integrale sul lato sinistro è la matrice di flessibilità dell'elemento:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} \mathbf{S}^s dx \quad (2.50)$$

2.5 Procedura di determinazione dello stato dell'elemento

La procedura per la valutazione della matrice di rigidità dell'elemento e delle forze resistenti viene descritta qui di seguito come presentato in [67].

Alla generica iterazione i -esima della procedura di Newton-Raphson (NR), viene richiamata la procedura per la determinazione dello stato dell'elemento per stabilire le risposte degli elementi e confrontarle con gli spostamenti nodali previsti. In questa fase gli spostamenti nodali dell'elemento vengono assegnati e sono note tutte le informazioni rilevanti della precedente iterazione ($i - 1$).

I passi per la determinazione dello stato elemento sono descritti qui di seguito e schematicamente rappresentati in figura(2.8):

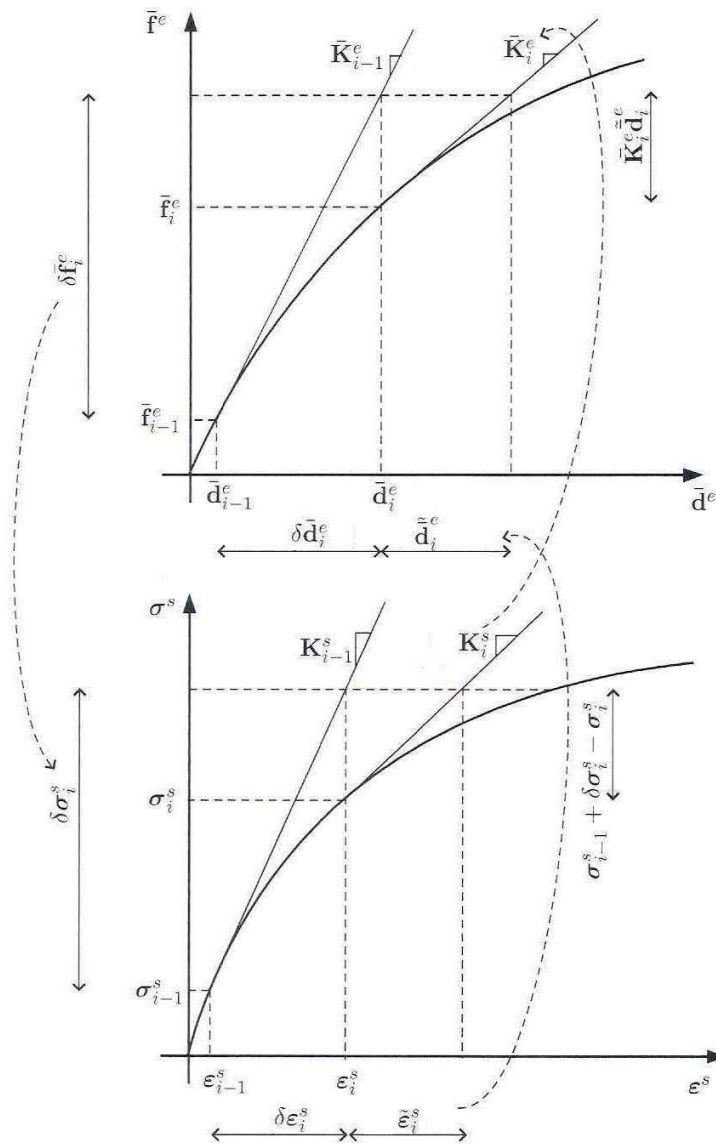


Figura 2.8: Diagramma schematico per la valutazione dello stato dell'elemento

1. Gli spostamenti nodali degli elementi, che sono assegnati nel riferimento globale, sono trasformati nel riferimento locale dell'elemento:

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{R}^e \mathbf{d}_{gi}^e \quad (2.51)$$

dove il pedice i indica che il quantitativo considerato viene valutato alla i -esima iterazione della procedura di N-R.

2. Calcolo dell'incremento di spostamenti nodali all'iterazione corrente i :

$$\delta \mathbf{d}_i^e = \mathbf{d}_i^e - \mathbf{d}_{i-1}^e \quad (2.52)$$

dove \mathbf{d}_{i-1}^e è il vettore di spostamenti nodali alla fine dell'iterazione precedente. Alla prima iterazione si ha:

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{d}_0^e - \mathbf{d}_{-1}^e \quad (2.53)$$

dove \mathbf{d}_{-1}^e è il vettore di spostamenti nodali ottenuto dalla convergenza dello step di carico precedente;

3. Soppressione degli atti di moto rigido con l'utilizzo della matrice di trasformazione geometrica \mathbf{T}^e usando le (2.32). In tal modo si passa da un $\bar{\mathbf{d}}_{i,(12 \times 1)}^e$ a un $\delta \bar{\mathbf{d}}_{i,(6 \times 1)}^e$ senza atti di moto rigido.

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_i^e = \mathbf{T}^e \delta \mathbf{d}_i^e \quad (2.54)$$

4. Calcolo dell'incremento di forze nodali interne corrispondenti a $\delta \bar{\mathbf{d}}_i^e$ come:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_i^e = \bar{\mathbf{K}}_{i-1}^e \delta \bar{\mathbf{d}}_i^e \quad (2.55)$$

dove $\bar{\mathbf{K}}_{i-1}^e$ è la matrice di rigidezza dell'elemento all'iterazione precedente, calcolata come $[\bar{\mathbf{F}}_{i-1}^e]^{-1}$, con $\bar{\mathbf{F}}_{i-1}^e$ matrice di flessibilità calcolata all'iterazione precedente. Se $i = 1$ allora:

$$\bar{\mathbf{K}}_{i-1}^e = [\bar{\mathbf{F}}_{i-1}^e]^{-1} = [\bar{\mathbf{F}}_0^e]^{-1} = [\bar{\mathbf{F}}_{-1}^e]^{-1} \quad (2.56)$$

dove $\bar{\mathbf{F}}_{-1}^e$ rappresenta la matrice di flessibilità ottenuta dalla convergenza dello step di carico precedente. Il $\delta \bar{\mathbf{f}}_i^e$ ottenuto dalla (2.55) non è corretto perchè è stata impiegata $\bar{\mathbf{K}}_{i-1}^e$ relativa all'iterazione precedente non conoscendo quella dell'iterazione corrente. La correzione verrà effettuata sulle sollecitazioni nel passo successivo.

5. Poichè a livello strutturale la procedura N-R viene condotta in termini di spostamenti, l'incremento forza non corrisponde ad un incremento di carico; effettivamente tra le iterazioni $i-1$ e i le forze globali non vengono incrementate. Inoltre, $\delta \bar{\mathbf{f}}_i^e$ non corrisponde ad una fase di carico della nuova procedura N-R, giacchè quando le forze globali sono incrementate gli spostamenti non vengono aggiornati immediatamente. In realtà, queste forze sono solo una stima delle forze corrispondenti ad un incremento degli spostamenti $\delta \bar{\mathbf{d}}_i^e$ valutate mediante l'ultimo valore noto della matrice di rigidezza.
6. I valori degli incrementi delle sollecitazioni generalizzate in ogni sezione di controllo s dell'elemento, vengono valutati interpolando tali incrementi di forza:

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{S}^s \delta \bar{\mathbf{f}}^e + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i-1}^s \quad (2.57)$$

dove $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i-1}^s$ è un correttore delle sollecitazioni che tiene conto delle tensioni residue all'iterazione precedente. È stato valutato alla fine dell'iterazione precedente, quindi è una quantità nota in questa fase. La valutazione reale sarà discussa più avanti (2.69) e rappresenta l'errore sulla valutazione degli incrementi di forza $\delta \bar{\mathbf{f}}_{i-1}^e$ alla iterazione precedente.

7. Si calcolano gli incrementi di deformazione corrispondenti agli incrementi delle caratteristiche di sollecitazioni $\delta \boldsymbol{\sigma}_i^s$:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^s = [\mathbf{K}_{i-1}^s]^{-1} \delta \boldsymbol{\sigma}_i^s \quad (2.58)$$

dove la matrice di rigidezza di ciascuna sezione di controllo $[\mathbf{K}_{i-1}^s]^{-1}(x)$, è calcolata all'iterazione precedente.

8. Si aggiorna il vettore deformazioni della sezione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^s = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^s + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^s \quad (2.59)$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^s$ è il vettore deformazioni calcolato all'iterazione precedente.

In particolare se $i = 1$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^s = \boldsymbol{\varepsilon}_0^s + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{-1}^s \quad (2.60)$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}_{-1}^s$ è il vettore deformazioni ottenuto dalla convergenza dello step di carico precedente.

9. Si valutano il valore attuale delle caratteristiche della sollecitazione $\boldsymbol{\sigma}_i^s$ e la matrice di rigidezza della sezione $\mathbf{K}_i^s(x)$ a partire dalla funzione costitutiva della sezione (Fiber-Free):

$$\boldsymbol{\sigma}_i^s = \boldsymbol{\sigma}_i[\boldsymbol{\varepsilon}^s] \quad \mathbf{K}_i^s = \mathbf{K}^s[\boldsymbol{\varepsilon}^s] \quad (2.61)$$

Quindi $\boldsymbol{\sigma}_i^s$ e \mathbf{K}_i^s sono ottenuti dal noto legame costitutivo della sezione, in funzione del livello di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}_i^s$ raggiunta.

10. Le matrici di rigidezza della sezione vengono invertite e integrate lungo l'elemento per valutare la matrice flessibilità dell'elemento:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}_i^s]^{-1} \mathbf{S}^s dx \quad (2.62)$$

11. Calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento:

$$\bar{\mathbf{K}}_i^e = [\bar{\mathbf{F}}_i^e]^{-1} \quad (2.63)$$

Se tutte le quantità di cui sopra sono stati valutate considerando il valore corretto degli elementi la rigidezza della sezione, le sollecitazioni generalizzate calcolato dalla formula (2.61) corrispondono a quelle ottenute aggiornando le sollecitazione valutate all'iterazione precedente $\boldsymbol{\sigma}_{i-1}^s$ con gli incrementi sollecitazioni $\delta\boldsymbol{\sigma}_i^s$. Questa eventualità vale solo nell'intervallo lineare elastico, di conseguenza, in una situazione più generale, ad ogni sezione di controllo, sorgono alcune tensioni residue $\boldsymbol{\sigma}_{i-1}^s + \delta\boldsymbol{\sigma}_i^s - \boldsymbol{\sigma}_i^s$. Queste tensioni residue vengono trasformate in deformazioni residue adottando la matrice di rigidezza della sezione valutata sopra.

12. Calcolo del residuo delle deformazioni della sezione:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^s = [\mathbf{K}_i^s]^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{i-1}^s + \delta\boldsymbol{\sigma}_i^s - \boldsymbol{\sigma}_i^s) \quad (2.64)$$

13. Calcolo del residuo sugli spostamenti nodali dell'elemento, prodotto da $\delta\boldsymbol{\sigma}_i^s$:

$$\tilde{\mathbf{d}}_i^e = \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^s dx \quad (2.65)$$

14. Calcolo del residuo sulle forze per correggere le forze nodali dell'elemento:

$$\tilde{\mathbf{f}}_i^e = (\bar{\mathbf{F}}_i^e)^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_i^e = \bar{\mathbf{K}}_i^e \tilde{\mathbf{d}}_i^e \quad (2.66)$$

15. Calcolo del vettore forze nodali dell'elemento sottraendo l'errore $\tilde{\mathbf{f}}_i^e$:

$$\bar{\mathbf{f}}_i^e = \bar{\mathbf{f}}_{i-1}^e + \delta \bar{\mathbf{f}}_i^e - \tilde{\mathbf{f}}_i^e \quad (2.67)$$

dove $\bar{\mathbf{f}}_{i-1}^e$ è il vettore delle forze nodali dell'elemento ottenuto dall'iterazione precedente.

Per $i = 1$ si ha:

$$\bar{\mathbf{f}}_{i-1}^e = \bar{\mathbf{f}}_0^e = \bar{\mathbf{f}}_{-1}^e \quad (2.68)$$

dove $\bar{\mathbf{f}}_{-1}^e$ rappresenta il vettore delle forze nodali dell'elemento ottenuto dalla convergenza dello step di carico precedente.

Va evidenziato che con $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^e$ non si corregge $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^e$, ma si corregge direttamente $\bar{\mathbf{f}}_1^e$, calcolando $\tilde{\mathbf{d}}_1^e$ e $\tilde{\mathbf{f}}_1^e$. La (2.67) si ottiene geometricamente, osservando il diagramma in figura(2.8)b. Nella (2.57) l'errore si somma perchè è relativo all'iterazione precedente, mentre nella (2.67) si sottrae essendo relativo all'iterazione corrente.

16. Calcolo dell'errore corrente commesso sulle $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^s = \mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}_i^e - \boldsymbol{\sigma}_i^s \quad (2.69)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_i^s = \mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}_i^e$ rappresenta la distribuzione di forze interne che soddisfa l'equilibrio. Invece $\boldsymbol{\sigma}_i^s$ fornito dalla (2.61) è la distribuzione di forze interne che viola l'equilibrio, ovvero non è compatibile con le funzioni di forma delle forze \mathbf{S}^s che impongono l'equilibrio lungo l'elemento. Di conseguenza, questo sbilanciamento delle forze interne della sezione rappresenta la differenza tra la distribuzione di forze interne $\boldsymbol{\sigma}_i^s$, che soddisfa le relazioni costitutive della sezione con la (2.61), e la distribuzione $\mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}_i^e$, che soddisfa l'equilibrio. Alla successiva iterazione l'errore $\boldsymbol{\sigma}_i^s$ si riduce insieme agli altri residui, ovvero gli ultimi $\bar{\mathbf{f}}_i^e$ e $\bar{\mathbf{K}}_i^e$ calcolati, si avvicinano di più ai valori esatti. Questo fino a quando non si raggiunge la convergenza, ovvero lo sbilanciamento delle caratteristiche della sollecitazione della sezione $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^s$ e tutti gli altri residui tendono a zero, ovvero tutti i valori calcolati sono quelli esatti. Anche la (2.67) si ottiene geometricamente, osservando il diagramma tensioni-deformazioni della sezione riportato in figura(2.8)b. Questo residuo verrà utilizzato nella successiva iterazione per correggere il $\delta \boldsymbol{\sigma}_i^s$ con la (2.57)

17. Si reintroducono gli atti di mto rigido utilizzando le (2.19):

$$\mathbf{f}_i^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}_i^e \quad \mathbf{K}_i^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}_i^e \mathbf{T}^e \quad (2.70)$$

18. Si riportano il vettore delle forze e la matrice di rigidezza nel riferimento globale:

$$\mathbf{f}_{gi}^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}_i^e \quad \mathbf{K}_{gi}^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}_i^e \mathbf{R}^e \quad (2.71)$$

Infine il vettore delle forze e la matrice di rigidezza di ciascun elemento espressi nel riferimento globale, vengono assemblati, andando a costruire un solo vettore delle forze e una sola matrice di rigidezza per l'intera struttura.

2.6 Carico concentrato e distribuito

In [67] gli effetti dei carichi distribuiti, sono considerati introducendo una distribuzione di sollecitazioni in equilibrio con i carichi e le reazioni vincolari sulla trave fittizia sono considerate nulle.

Posto \mathbf{h}^e il vettore contenente i valori dei carichi distribuiti e \mathbf{S}^s la matrice che contiene le caratteristiche delle sollecitazioni per carico distribuito unitario, la formula per la valutazione delle caratteristiche delle sollecitazioni agenti (2.42) diventa:

$$\sigma^s = \mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{D}^s \mathbf{h}^e \quad (2.72)$$

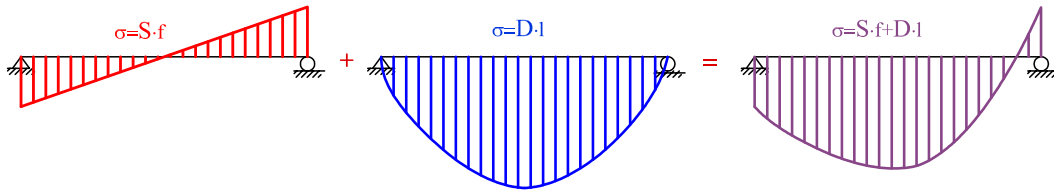


Figura 2.9: Upgrade funzioni di interpolazione

di conseguenza, nella procedura di determinazione dello stato dell'elemento, la formula (2.72) è sostituita con:

$$\sigma^s = \mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{D}^s \mathbf{h}^e + \tilde{\sigma}_{i-1}^s \quad (2.73)$$

Occorre notare che il termine contenente gli effetti degli elementi di carico $\mathbf{D}^s \mathbf{h}^e$ non è espresso in termini di incrementi di sollecitazioni essendo considerata una correzione delle sollecitazioni generalizzate, simile a $\tilde{\sigma}_{i-1}^s$. L'espressione effettiva della \mathbf{D}^s dipende da come viene definito il vettore \mathbf{h}^e : ad esempio, se \mathbf{h}^e contiene i valori dei carichi trasversali uniformemente distribuiti, la matrice \mathbf{D}^s assume la seguente espressione:

$$\mathbf{h}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^2/8 - x^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l^2/8 + x^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

In generale, fintanto che la matrice \mathbf{D}^s viene ben definita, il vettore \mathbf{h}^e non è limitato a contenere i valori di carichi trasversali uniformemente distribuiti, ma può essere esteso a qualsiasi tipo di carico sugli elementi, come ogni tipo di carico distribuito, forze o momenti concentrati e così via.

Seguendo questa logica è possibile tradurre il carico concentrato in mezzzeria, in forze nodali: si considera un vettore \mathbf{c} , contenente il valore della forza concentrata in mezzzeria, e una matrice \mathbf{C}^s , contenente le caratteristiche della sollecitazione dovute ad una forza unitaria:

$$\mathbf{c}^e = \begin{bmatrix} 0 & f_y & f_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.75)$$

per $x \leq l/2$ la \mathbf{C}^s ha espressione:

$$\mathbf{C}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l/4 + x/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/4 + x/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

mentre per $x > l/2$ si ha:

$$\mathbf{C}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l/4 - x/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/4 - x/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Le caratteristiche della sollecitazione della (2.72), vengono aggiornate come:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{D}^s \mathbf{h}^e + \mathbf{C}^s \mathbf{c}^e \quad (2.78)$$

e la (2.73) viene aggiornata con la seguente

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{S}^s \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{D}^s \mathbf{h}^e + \mathbf{C}^s \mathbf{c}^e + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i-1}^s \quad (2.79)$$

Dalle sollecitazioni calcolate con la (2.78), il *PVW* porta alla definizione di forze nodali equivalenti agli elementi di carico, che devono essere aggiunti alle forze effettivamente applicati ai nodi. Da (2.78) è semplice da ottenere:

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^s = \mathbf{S}^s \delta \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{D}^s \mathbf{h}^e + \mathbf{C}^s \mathbf{c}^e \quad (2.80)$$

Dal momento che la sollecitazione virtuale $\boldsymbol{\sigma}_v^s$ e le forze $\bar{\mathbf{f}}_v^s$ non tengono conto degli elementi di carico, l'equazione (2.48) è ancora valida e con l'uso dell'equazione precedente

diventa:

$$\int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} \mathbf{S}^s dx \delta \bar{\mathbf{f}}^e + \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} \mathbf{D}^s dx \delta \mathbf{h}^e + \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} \mathbf{C}^s dx \delta \mathbf{c}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \quad (2.81)$$

Facendo uso di (2.50) e ponendo:

$$\mathbf{A}^e = \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} \mathbf{D}^s dx \quad (2.82)$$

$$\mathbf{B}^e = \int_{l^e} \mathbf{S}^{sT} [\mathbf{K}^s]^{-1} \mathbf{C}^s dx \quad (2.83)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^e \delta \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{A}^e \delta \mathbf{h}^e + \mathbf{B}^e \delta \mathbf{c}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \quad (2.84)$$

Moltiplicando due termini dell'equazione precedente per

$$\bar{\mathbf{K}}^e = [\bar{\mathbf{F}}^e]^{-1} \quad (2.85)$$

si ha:

$$\delta \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{K}}^e [\mathbf{A}^e \delta \mathbf{h}^e + \mathbf{B}^e \delta \mathbf{c}^e] \quad (2.86)$$

Nella procedura di determinazione dello stato dell'elemento, detto aumento è stato utilizzato per aggiornare le forze $\bar{\mathbf{q}}_i$ equivalenti al carico e viene aggiunto alle forze resistenti dell'elemento. L'equazione (2.67) è sostituita con:

$$\bar{\mathbf{f}}_i^e = \bar{\mathbf{f}}_{i-1}^e + \delta \bar{\mathbf{f}}_i^e - \bar{\mathbf{K}}_i^e \tilde{\bar{\mathbf{d}}}_i^e + \bar{\mathbf{q}}_i \quad (2.87)$$

In seguito all'eliminazione della moti di corpo rigido mediante l'introduzione di vincoli fittizi alle estremità degli elementi, le forze \mathbf{f}^e in (2.33) sono valutate dal prodotto delle reazioni di questi vincoli per i carichi agenti sull'elemento.

Di conseguenza, quando viene trasformato $\bar{\mathbf{f}}^e$ per ottenere \mathbf{f}^e queste reazioni devono essere ripristinate. Questo argomento viene omissso in [67], dove la descrizione della procedura di determinazione dello stato dell'elemento è limitata al riferimento di modalità libera dai moti di corpo rigido. Effettivamente, assumendo la distribuzione delle tensioni in (2.78), è necessario considerare forze aggiuntive quando $\bar{\mathbf{f}}^e$ è trasformato nel riferimento locale dell'elemento così le formule (2.33) e (2.70) devono essere sostituite con:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e + \mathbf{P}_q^e \mathbf{h}^e + \mathbf{P}_c^e \mathbf{c}^e \quad (2.88)$$

dove \mathbf{P}_q^e è una matrice che trasforma i carichi uniformemente distribuiti \mathbf{h}^e in forze nodali; ad esempio, per i carichi che producono le sollecitazioni della (2.78), \mathbf{P}_q^e assume l'espressione

$$\mathbf{P}_q^e = \begin{bmatrix} 0 & l^e/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^e/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^e/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^e/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

invece, la matrice \mathbf{P}_c^e traduce in forze nodali, il carico concentrato in mezzzeria \mathbf{c}^e e vale:

$$\mathbf{P}_c^e = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Capitolo 3

Schemi di integrazione

3.1 Formule di quadratura Gaussiane

Si tratta di formule di quadratura interpolatorie a nodi non equidistanti costruite in modo da massimizzare il grado di precisione.

- un esempio semplice di questa idea è dato dalla formula del punto medio, in cui il grado di precisione passa da $m = 0$ ad $m = 1$ collocando opportunamente il nodo x_0 ;
- per questa strada si costruiscono formule a pesi positivi, convergenti per $n \rightarrow \infty$ e con grado di precisione $m = 2n + 1$;
- l'intervallo di riferimento normalmente è $[-1, 1]$.

Esempio: formula a due nodi simmetrici $\pm a$ in $[-1, 1]$

- le costanti sono integrate esattamente se $\omega_0 + \omega_1 = 2$;
- i termini di primo grado sono integrati esattamente se $\omega_0 = \omega_1$;
- i termini di secondo grado sono integrati esattamente se

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = I_1(x^2, -1, 1) \equiv \omega_0 \cdot (-a)^2 + \omega_1 \cdot a^2 = 2a^2, \text{ il che porta alla scelta di } a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- i termini di terzo grado sono già integrati esattamente per simmetria.

Sono detti polinomi di Legendre in $[-1, 1]$, la famiglia di polinomi $\{P_k\}$ tali che $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $\deg P_k = k$, e che

$$\int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j \quad (3.1)$$

Questa famiglia si può costruire per ortogonalizzazione della base naturale $\{1, x, x^2, \dots\}$, oppure mediante la formula ricorrente

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xP_k(x) - \frac{k}{k+1}P_{k-1}(x) \quad (3.2)$$

che permette di calcolarli per $k \geq 1$ dati P_0 e P_1 . L'insieme $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ è una base dello spazio \mathbf{P}_k .

Nelle formule di Gauss-Legendre:

- Gli $n+1$ nodi di quadratura vengono posti in corrispondenza delle radici del polinomio di Legendre P_{n+1} (ovvero il polinomio di errore α_n coincide a meno di costanti moltiplicative con P_{n+1}). Nella pratica i nodi devono essere a loro volta calcolati in modo approssimato;
- i pesi di quadratura sono definiti nella maniera usuale $\omega_i = \int L_i(x)dx$ (questo integrale può essere valutato esattamente mediante una quadratura che abbia il grado di precisione richiesto, ad esempio una formula gaussiana di grado appena più basso).

Per quanto riguarda la convergenza delle formule di Gauss-Legendre:

- le formule di Gauss convergono per ogni $f \in C^o([-1, 1])$. La convergenza deriva dall'applicazione del teorema di Plova, poichè la formula è costruita integrando il polinomio di Lagrange, ed inoltre
 1. i nodi sono tutti interni a $[-1, 1]$;
 2. i pesi sono tutti positivi, quindi $\sum_k |a_k| = 2$
- il grado di precisione di una formula gaussiana a $n+1$ nodi è $m = 2n+1$ (questo implica anche una stima molto favorevole dell'errore).

Un esempio di quadratura è riportato nella tabella(3.1):

In letteratura sono calcolati i valori dei punti di quadratura per tutti gli n inferiori a 10; per valori più alti sono calcolati solo quelli con n pari. Per testare l'elemento in esame è stato necessario, calcolare i valori di quadratura per $n = 19$, quindi è stata scritta una routine in matlab, che consente di ottenere i valori di quadratura per qualsiasi valore di n .

n	x_i	ω_i
0	0,0	2,0
1	$\pm 0,57735027$	1,0
2	$\pm 0,77459667$	0,55555556
	0,0	0,88888889
3	$\pm 0,86113631$	0,34785485
	$\pm 0,33998104$	0,65214515
4	$\pm 0,90617985$	0,23692689
	$\pm 0,53846931$	0,47862867
	$\pm 0,0$	0,56888889

Tabella 3.1: Esempio punti di Gauss

```

function [x,w]=xwlegendre(n)
% Function per il calcolo delle ascisse x e per i pesi w
% della formula di quadratura di Gauss-Legendre.
% -----Input-----
% n = numero dei punti di quadratura
% -----Output-----
% x = vettore colonna delle ascisse
% w = vettore colonna dei pesi
if n<=1
x=[0];
w=[2];
return
end
A=zeros(n);
k=[1:n-1];
v=k./(sqrt(4*(k./^2)-1));
A=A+diag(v,1)+diag(v,-1);
[w,x]=eig(A);
nm2=sqrt(diag(w'*w));
w=(2*w(1,:))'./^2)./nm2;
x=diag(x);

```


3.2 Integrazione sull'elemento

Si considera una trave di lunghezza L e sezione trasversale Ω . Si introduce un sistema di coordinate cartesiane locali con origine in O , assi x e y giacenti nel piano della sezione trasversale e asse z ortogonale al piano x - y e coincidente con l'asse della trave. L'analisi non lineare di elementi trave con la formulazione alle forze è basata sulla valutazione del residuo sugli spostamenti nodali dell'elemento, in assenza di atti di moto rigido:

$$\bar{\mathbf{d}}^e = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{S}^T(z) \tilde{\mathbf{e}}(z) dz \quad (3.3)$$

e della matrice di flessibilità dell'elemento, in assenza di atti di moto rigido:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{S}^T(z) \mathbf{F}^s(z) \mathbf{S}^T(x) dz \quad (3.4)$$

dove $\mathbf{S}(z)$ è la matrice operatore di tensione, data dalla (2.43), contenente le funzioni di forma delle forze; $\tilde{\mathbf{e}}(z)$ è il residuo sulle deformazioni della sezione data dalla (2.64) e $\mathbf{F}^s(z)$ è la matrice di flessibilità della sezione data dalla (2.62). Per la valutazione degli integrali (3.3) e (3.4) sono stati utilizzati gli schemi di quadratura di Gauss e Lobatto nelle analisi numeriche di seguito riportate, dal momento che entrambi sono maggiormente adottati per elementi beam nell'analisi non lineare di strutture intelaiate. Come è noto entrambe gli schemi di quadratura permettono la valutazione numerica degli integrali 1D come quelli nelle equazioni (3.3) e (3.4), conoscendo il valore della funzione da integrare in un numero finito lungo il dominio. La legge generale è:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z) dz = \int_{-1}^1 f \cdot \left(\xi \cdot \frac{L}{2} \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \frac{L}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+n_q} \omega_i \cdot f \left(\xi_i \cdot \frac{L}{2} \right) = \quad (3.5)$$

dove si è posto $z = \xi \cdot \frac{L}{2}$ per passare dal dominio effettivo $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ al dominio di riferimento $[-1, 1]$, f è una funzione reale con valori definiti nel dominio di riferimento $[-1, 1]$ a cui il dominio effettivo è ricondotto, ω_i sono i cosiddetti pesi e ξ_i le ascisse in cui è valutata f . Le ascisse ξ_i , anche chiamate 'punti di controllo' (o sezioni di controllo nel caso l'integrale è esteso all'asse della trave) ed i corrispondenti pesi ω_i , sono impostati in modo da fornire risultati esatti per funzioni f che sono polinomi di grado $2n_q - 1$ per quadratura di Gauss o $2n_q - 3$. Le principali differenze tra gli schemi di Gauss e Lobatto consistono nel fatto che, le ascisse considerate nel primo appartengono alla zona interna del dominio di integrazione, mentre le ascisse considerate nel secondo includono i punti estremi dell'intervallo di integrazione, dove ci sono i vincoli, quindi solo $2n_q - 2$ ascisse sono posizionate liberamente. Questa proprietà è particolarmente utile in analisi non lineare di strutture intelaiate, poichè la

cerniere plastiche tendono a formarsi nei punti estremi della membratura. Per questi ragioni lo schema di integrazione di Lobatto è stato sostenuto dai principali autori come alternativa al più tradizionale approccio di Gauss. Ma questa scelta si basa solo su considerazioni fisiche senza aver compiuto indagini numeriche.

3.3 Integrazione nella sezione

Si considera una trave di lunghezza L e sezione trasversale Ω . Si introduce un sistema di coordinate cartesiane locali con origine in O , assi x e y giacenti nel piano della sezione trasversale e asse z ortogonale al piano xy e coincidente con l'asse della trave. Consideriamo inoltre, un legame $\sigma - \varepsilon$ uniassiale elasto-plastico, simbolicamente denotato da $\sigma(\varepsilon)$ tra la tensione longitudinale e la deformazione in un generico punto $\mathbf{r} = \{x, y\}^T \in \Omega$, le risultanti delle tensioni normali sono definite come:

$$\mathbf{N}(z) = \int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(x, y, z)) \cdot dA \quad (3.6)$$

$$\mathbf{M}^{\perp} = \{-M_y, M_x\}^T = \int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(x, y, z)) \cdot \mathbf{r} \cdot dA \quad (3.7)$$

Poichè si vuole focalizzare l'attenzione sul comportamento assiale-flettente dell'elemento, la relazione tra l'angolo di torsione e il momento torsionale è considerata elastico-lineare e disaccoppiato dalla forza assiale e dal momento flettente; inoltre, in accordo con il modello trave di Eulero-Bernoulli, è stata trascurata la deformazione da taglio.

La deformazione assiale ε in un generico punto \mathbf{r} della sezione è determinata in funzione del gradiente di deformazione $\mathbf{g} = \chi^{\perp} = \{-\chi_y, \chi_x\}^T$ e della deformazione assiale nel baricentro della sezione ϵ come:

$$\varepsilon(x, y, z) = \epsilon(z) + \chi_x(z) \cdot y - \chi_y(z) \cdot x = \mathbf{g}(z) \cdot \mathbf{r} \quad (3.8)$$

Le derivate delle tensioni risultanti (3.6) e (3.7) rispetto a tali parametri di deformazione ϵ e χ^{\perp} , forniscono la matrice di rigidezza della sezione:

$$\mathbf{K}^s = \sigma_{,\epsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\epsilon} & \mathbf{N}_{,\chi^{\perp}} \\ \mathbf{M}_{,\epsilon} & \mathbf{M}_{,\chi^{\perp}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Per valutare gli integrali nella (3.6) e (3.7) e le relative derivate (3.9), si possono considerare due schemi di integrazione:

1. il metodo a Fibre che è il più adottato in commercio e per software scientifici;

2. l'approccio Fiber-Free, di recente formulazione [54], che consente la valutazione analitica delle proprietà della sezione.

Ulteriori dettagli su tale tecnica innovativa saranno forniti nel capitolo successivo.

Capitolo 4

L'approccio Fiber-Free

Le tecniche per le analisi strutturali non lineari [14, 40, 41, 51, 74, 81, 82, 83, 103, 104, 105, 110] hanno recentemente trovato applicazioni significative nella pratica ingegneristica per valutare le prestazioni degli edifici e dei ponti, sia esistenti che nuovi, sotto carichi statici e dinamici. In particolare, le recenti norme sismiche basate su un approccio prestazionale [30, 31] richiedono raffinate analisi non lineari per valutare le richieste strutturali locali e globali.

Come è noto l'analisi strutturale non lineare di strutture intelaiate è basata sulla sequenza di tre cicli iterativi nidificati e cioè struttura \rightarrow elemento \rightarrow sezione e viceversa.

A tal riguardo diverse strategie sono state proposte al fine di ridurre l'onere computazionale al livello elemento/struttura [67, 68]. In quest'ultimo articolo, in particolare, sono stati presentati e messi a confronto quattro differenti approcci consistenti nell'uso di equazioni non lineari e/o linearizzate sia a livello di elemento che a livello di sezione. Di recente la formulazione di elementi finiti non lineari basati sull'approccio alle forze ha trovato una caratterizzazione di tipo variazionale [100, 99]. Nonostante questi sforzi, una scarsa attenzione è stata rivolta all'analisi delle approssimazioni indotte al livello di sezione dalle tecniche numeriche ad essa relativa, con la sola rimarchevole eccezione di due articoli dovuti a Saje e collaboratori [99, 126]. A tal scopo, essi hanno presentato una nuova procedura di integrazione per il campo delle tensioni e la matrice delle rigidezze, sebbene limitata a leggi costitutive di tipo monotono, comparando i risultati con gli approcci alternativi esistenti in letteratura.

In considerazione dell'importanza di una valutazione computazionalmente più efficiente degli integrali relativi alla sezione, operazione che viene eseguita diverse migliaia di volte in un'analisi strutturale, è stato fornito in [57] un'ulteriore contributo all'analisi sezionale non lineare. In particolare in tale articolo è stato esteso l'approccio fiber-free alla valutazione della matrice di rigidezza tangente formulata in un precedente articolo [56], poiché esso permette l'integrazione analitica di leggi costitutive non lineari sia elastiche che elasto-plastiche su

domini poligonali di forma arbitraria.

Le principali ipotesi sottostanti l'approccio fiber-free sono essenzialmente due. Primo, i rami di carico-scarico della legge elasto-plastica sono assunti lineari. Inoltre, il legame costitutivo deve possedere primitive almeno del quarto ordine, così come derivate fino quarto ordine, nel senso che occorre valutare analiticamente funzioni la cui derivata quarta restituisce la legge costitutiva originaria.

Nel lavoro [57] le prestazioni dell'approccio fiber-free sono state ulteriormente confermate mostrando la loro indipendenza dalla complessità delle leggi costitutive. Questo risultato è stato ottenuto valutando analiticamente la risultante delle tensioni e la matrice di rigidezza tangente per una legge elasto-plastica bilineare, a differenza della legge di Karsan-Jirsa considerata nel precedente articolo [56], e svolgendo diversi confronti con il metodo a fibre, indubbiamente la tecnica d'integrazione più diffusa nei software accademici [70] e commerciali [64] per analisi strutturali non lineari. Gli esempi numerici illustrati in [57] hanno confermato il principale vantaggio legato alla metodologia fiber-free:

- I) l'analisi non-lineare della sezione è compiuta esattamente e molto economicamente dal punto di vista computazionale dato che non c'è di bisogno di memorizzare le deformazioni plastiche di ogni fibra, obbligando in tal modo il progettista a limitare il numero di fibre di ogni sezione del modello strutturale per evitare overflow di memoria;
- II) gli errori significativi associati con il numero di fibre di solito suggerito nei software per le analisi strutturali non-lineari, solitamente minore di duecento, può essere completamente evitato;
- III) l'ulteriore errore associato all'uso del metodo a fibre per domini non rettangolari viene evitato con l'approccio fiber-free poiché quest'ultimo può essere applicato senza modifiche a sezioni di forma arbitraria.

I principali risultati ottenuti in [57] sono riportati per completezza nel seguito. Nel paragrafo 4.1 si presenta un sommario dell'approccio fiber-free, mentre tutte le formule d'integrazione richieste per la valutazione analitica delle risultanti delle tensioni su domini poligonali arbitrari sono brevemente richiamati nel paragrafo 4.2. Le ulteriori formule richieste per la valutazione della matrice di rigidezza sono derivate nel paragrafo 4.3 ed i test numerici, sia per una legge costitutiva bilineare (paragrafo 4.6.3) che per la legge tensione-deformazione di Karsan-Jirsa [44] (paragrafo 4.6.4) sono riportati nel paragrafo 4.5. Infine, le primitive e le derivate della legge costitutive bilineare necessarie per l'applicazione dell'approccio fiber-free sono dettagliate nei paragrafi 4.6.1 4.6.2.

4.1 L'approccio Fiber-Free per l'analisi elasto plastica di una struttura intelaiata

Nell'analisi elasto-plastica di una struttura intelaiata, nel generico istante di tempo t^c , i parametri di deformazione ϵ^c e \mathbf{g}^c di un'arbitraria sezione di controllo del modello, sono noti; pertanto il valore di deformazione nel punto \mathbf{r} della sezione, assunto positivo se di trazione, può essere calcolato come:

$$\epsilon^c(\mathbf{r}) = \epsilon^c + \mathbf{g}^c \cdot \mathbf{r} \quad (4.1)$$

Assegnata una legge tensio deformativa $\sigma : \epsilon^c \rightarrow \sigma(\epsilon^c)$, come quella riportata in figura 4.1, uno dei principali compiti da realizzare allo scopo di ottenere la soluzione del modello strutturale è calcolare la risultante delle tensioni

$$N^c = \int_{\Omega} \sigma[\epsilon^c(\mathbf{r}), \epsilon_m^c(\mathbf{r})] dA \quad (4.2)$$

$$\mathbf{M}^{c\perp} = \int_{\Omega} \sigma[\epsilon^c(\mathbf{r}), \epsilon_m^c(\mathbf{r})] \mathbf{r} dA \quad (4.3)$$

e le loro derivate nei rispettivi parametri ϵ^c e \mathbf{g}^c .

$$\mathbf{K}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^c}{\partial \epsilon^c} & \frac{\partial N^c}{\partial g_x^c} & \frac{\partial N^c}{\partial g_y^c} \\ -\frac{\partial M_y^c}{\partial \epsilon^c} & -\frac{\partial M_y^c}{\partial g_x^c} & -\frac{\partial M_y^c}{\partial g_y^c} \\ \frac{\partial M_x^c}{\partial \epsilon^c} & \frac{\partial M_x^c}{\partial g_x^c} & \frac{\partial M_x^c}{\partial g_y^c} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dove Ω indica il dominio della sezione retta.

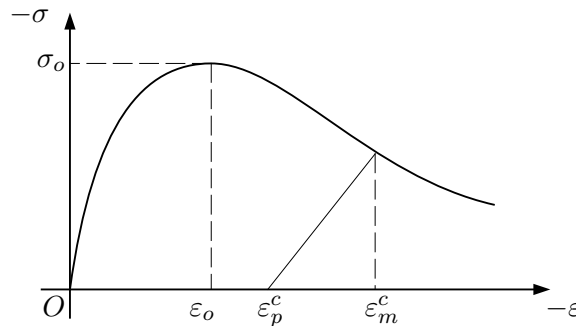


Figura 4.1: Una tipica legge sforzo-deformazione monodimensionale per il calcestruzzo

La tensione corrente σ nel punto \mathbf{r} , dipende non solo dalla corrispondente deformazione ϵ^c ma, in base alle consuete leggi costitutive del calcestruzzo, anche dalla minima deformazione

ε_m^c attinta nel punto \mathbf{r} , prima di t^c ; tipicamente si ha:

$$\sigma[\varepsilon^c(\mathbf{r}), \varepsilon_m^c(\mathbf{r})] = \begin{cases} e[\varepsilon^c(\mathbf{r})] & \varepsilon^c(\mathbf{r}) < \varepsilon_m^c(\mathbf{r}) \\ \frac{e[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})]\{\varepsilon^c(\mathbf{r}) - \varepsilon_p[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})]\}}{\varepsilon_m^c(\mathbf{r}) - \varepsilon_p[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})]} & \varepsilon_m^c(\mathbf{r}) \leq \varepsilon^c(\mathbf{r}) < \varepsilon_p[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})] \\ 0 & \varepsilon_p[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})] \leq \varepsilon^c(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (4.5)$$

dove e rappresenta la funzione inviluppo, rappresentata graficamente dalla curva non lineare dal tratto continuo nella figura 4.1, e ε_p è la deformazione plastica prodotta in \mathbf{r} dalla precedente storia deformativa. A sua volta, quest'ultima quantità è espressa come:

$$\varepsilon_p[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})] = \begin{cases} p[\varepsilon_m^c(\mathbf{r})] & \varepsilon_m^c(\mathbf{r}) \leq \varepsilon_y \\ 0 & \varepsilon_y < \varepsilon_m^c(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (4.6)$$

dove ε_y è la tensione di snervamento.

Pertanto, al fine di valutare correttamente l'espressione della funzione tensione da integrare, è necessario selezionare i punti della sezione in cui la deformazione minima ε_m^c è definita dagli stessi parametri ε_m^c e \mathbf{g}_m^c per tutti gli istanti $t < t^c$. Per esempio, supponendo che nel generico punto $\bar{\mathbf{r}} \in \Omega$ la minima deformazione è stata raggiunta per $t^l < t^c$, e cioè.

$$\varepsilon_m^c(\bar{\mathbf{r}}) = \varepsilon^l(\bar{\mathbf{r}}) = \varepsilon^l + \mathbf{g}^l \cdot \bar{\mathbf{r}} \quad (4.7)$$

è possibile definire il sottodominio Ω_l^c del poligono Ω come l'insieme di punti i quali soddisfano il seguente insieme di condizioni:

$$\Omega_l^c = \{\mathbf{r} \in \Omega | \varepsilon^l(\mathbf{r}) < \varepsilon^k(\mathbf{r}), \forall t^k < t^c \quad k \in \{0, \dots, c-1\} \text{ e } l \neq k\} \quad (4.8)$$

In questo modo il dominio della sezione Ω è suddiviso in una unione di sottodomini non sovrapponibili, funzioni di t^c , ognuno dei quali comprende i punti caratterizzati dalla stessa espressione delle caratteristiche della sollecitazione. Ulteriori dettagli su questo aspetto possono essere reperiti in [56] cui si rimanda il lettore. Dunque, nel seguito, assumeremo che la suddivisione di Ω al tempo t^c è stata determinata.

Come mostrato in [56] la risultante delle tensioni (4.2) e (4.3) può essere valutata analiticamente sommando i diversi contributi corrispondenti a ciascun sottodominio Ω_l^c della suddivisione:

$$N^c = \sum_{l=0}^c N_{\Omega_l^c} \quad \mathbf{M}^{c\perp} = \sum_{l=0}^c \mathbf{M}_{\Omega_l^c}^\perp \quad (4.9)$$

In particolare, in accordo con la definizione (4.8) di Ω_l^c , la minima deformazione in ogni punto $\mathbf{r} \in \Omega_l^c$ è data dalla funzione ε^l cosicchè la legge tensione-deformazione (4.5) si

specializza in

$$\sigma[\varepsilon^c(\mathbf{r}), \varepsilon^l(\mathbf{r})] = \begin{cases} e[\varepsilon^c(\mathbf{r})] & \mathbf{r} \in \Omega_{la}^c \\ \frac{e[\varepsilon^l(\mathbf{r})]\{\varepsilon^c(\mathbf{r}) - \varepsilon_p[\varepsilon^l(\mathbf{r})]\}}{\varepsilon^l(\mathbf{r}) - \varepsilon_p[\varepsilon^l(\mathbf{r})]} & \mathbf{r} \in \Omega_{lb}^c \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_l^c - \Omega_{la}^c - \Omega_{lb}^c \end{cases} \quad (4.10)$$

dove sono stati introdotti i due ulteriori sottodomini Ω_l^c :

$$\begin{aligned} \Omega_{la}^c &= \{\mathbf{r} \in \Omega_l^c | \varepsilon^c(\mathbf{r}) < \varepsilon^l(\mathbf{r})\} \\ \Omega_{lb}^c &= \{\mathbf{r} \in \Omega_l^c | \varepsilon^l(\mathbf{r}) < \varepsilon^c(\mathbf{r}) < \varepsilon_p[\varepsilon^l(\mathbf{r})]\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Inoltre, richiamando l'equazione (4.6), si definisce anche la sottoclasse Ω_{lb}^c data da:

$$\begin{aligned} \Omega_{lbp}^c &= \{\mathbf{r} \in \Omega_l^c | \varepsilon^l(\mathbf{r}) \leq \varepsilon_y \text{ and } \varepsilon^l(\mathbf{r}) < \varepsilon^c(\mathbf{r}) < p[\varepsilon^l(\mathbf{r})]\} \\ \Omega_{lbo}^c &= \{\mathbf{r} \in \Omega_l^c | \varepsilon_y \leq \varepsilon^l(\mathbf{r}) \text{ and } \varepsilon^l(\mathbf{r}) < \varepsilon^c(\mathbf{r}) < 0\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Per enfatizzare la dipendenza separata da ε^c e ε^l delle funzioni che compaiono nella definizione della tensione, la legge tensione-deformazione (4.10) è riformulata più convenientemente nella forma:

$$\sigma[\varepsilon^c(\mathbf{r}), \varepsilon^l(\mathbf{r})] = h[\varepsilon^l(\mathbf{r})]\varepsilon^c(\mathbf{r}) + k[\varepsilon^l(\mathbf{r})] + l[\varepsilon^c(\mathbf{r})] \quad \mathbf{r} \in \Omega_l^c \quad (4.13)$$

dove:

$$h[\varepsilon^l(\mathbf{r})] = \begin{cases} h_p[\varepsilon^l(\mathbf{r})] = \frac{e[\varepsilon^l(\mathbf{r})]}{\varepsilon^l(\mathbf{r}) - p[\varepsilon^l(\mathbf{r})]} & \mathbf{r} \in \Omega_{lbp}^c \\ h_o[\varepsilon^l(\mathbf{r})] = \frac{e[\varepsilon^l(\mathbf{r})]}{\varepsilon^l(\mathbf{r})} & \mathbf{r} \in \Omega_{lbo}^c \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_l^c - \Omega_{lbp}^c - \Omega_{lbo}^c \end{cases} \quad (4.14)$$

$$k[\varepsilon^l(\mathbf{r})] = \begin{cases} k_p[\varepsilon^l(\mathbf{r})] = \frac{e[\varepsilon^l(\mathbf{r})]p[\varepsilon^l(\mathbf{r})]}{p[\varepsilon^l(\mathbf{r})] - \varepsilon^l(\mathbf{r})} & \mathbf{r} \in \Omega_{lbp}^c \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_l^c - \Omega_{lbp}^c \end{cases} \quad (4.15)$$

e

$$l[\varepsilon^c(\mathbf{r})] = \begin{cases} l_a[\varepsilon^c(\mathbf{r})] = e[\varepsilon^c(\mathbf{r})] & \mathbf{r} \in \Omega_{la}^c \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_l^c - \Omega_{la}^c \end{cases} \quad (4.16)$$

Infatti $h(\cdot)$ e $k(\cdot)$ dipendono soltanto dai parametri della deformazione ε^l e \mathbf{g}^l , i quali definiscono ε^l , mentre $l(\cdot)$ dipende solo da ε^c e \mathbf{g}^c .

Ciò è stato mostrato in [56] dove la risultante delle tensioni(4.9) associata ad un arbitraria legge costitutiva elasto-plastica uniassiale può essere espressa come combinazione lineare degli integrali:

$$A_f = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon) d\Omega \quad \mathbf{s}_f = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon) \mathbf{r} d\Omega \quad \mathbf{J}_f = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon) \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} d\Omega \quad (4.17)$$

dove Ω_ε si riferisce al generico sottodominio Ω_{la}^c , Ω_{lbp}^c or Ω_{lbo}^c e f è usata per indicare una delle funzioni $h : \varepsilon^l \rightarrow h(\varepsilon^l)$, $k : \varepsilon^l \rightarrow k(\varepsilon^l)$ and $l : \varepsilon^c \rightarrow l(\varepsilon^c)$ introdotte in (4.14)-(4.16).

Per lo sforzo normale essa vale:

$$N_{\Omega_l^c} = A_{h_p} \epsilon^c + \mathbf{s}_{h_p} \cdot \mathbf{g}^c + A_{h_o} \epsilon^c + \mathbf{s}_{h_o} \cdot \mathbf{g}^c + A_{k_p} + A_{l_a} \quad (4.18)$$

mentre per il momento flettente risulta:

$$\mathbf{M}_{\Omega_l^c}^\perp = \mathbf{s}_{h_p} \epsilon^c + \mathbf{J}_{h_p} \mathbf{g}^c + \mathbf{s}_{h_o} \epsilon^c + \mathbf{J}_{h_o} \mathbf{g}^c + \mathbf{s}_{k_p} + \mathbf{s}_{l_a} \quad (4.19)$$

in cui gli integrali $(\cdot)_{h_p}$ e $(\cdot)_{k_p}$ sono riferiti al dominio Ω_{lbp}^c , mentre $(\cdot)_{h_o}$ e $(\cdot)_{l_a}$ sono integrati rispettivamente su Ω_{lbo}^c e Ω_{la}^c .

Analogamente, la matrice di rigidezza è stata valutata considerando il contributo di ogni suddivisione:

$$\mathbf{K}^c = \sum_{l=0}^c \mathbf{K}_{\Omega_l^c} \quad (4.20)$$

nella quale sono richieste le derivate di $N_{\Omega_l^c}$ e $\mathbf{M}_{\Omega_l^c}^\perp$. In effetti, differenziando le equazioni (4.18) e (4.19) rispetto ai parametri correnti della deformazione ϵ^c e \mathbf{g}^c si ottengono gli elementi della matrice di rigidezza:

$$N_{\Omega_l^c, \epsilon^c} = A_{h_p} + A_{h_p, \epsilon^c} \epsilon^c + \mathbf{s}_{h_p, \epsilon^c} \cdot \mathbf{g}^c + A_{h_o} + A_{h_o, \epsilon^c} \epsilon^c + \mathbf{s}_{h_o, \epsilon^c} \cdot \mathbf{g}^c + A_{k_p, \epsilon^c} + A_{l_a, \epsilon^c} \quad (4.21)$$

$$N_{\Omega_l^c, \mathbf{g}^c} = A_{h_p, \mathbf{g}^c} \epsilon^c + \mathbf{s}_{h_p} + \mathbf{s}_{h_p, \mathbf{g}^c} \mathbf{g}^c + A_{h_o, \mathbf{g}^c} \epsilon^c + \mathbf{s}_{h_o} + \mathbf{s}_{h_o, \mathbf{g}^c} \mathbf{g}^c + A_{k_p, \mathbf{g}^c} + A_{l_a, \mathbf{g}^c} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{M}_{\Omega_l^c, \epsilon^c}^\perp = \mathbf{s}_{h_p} + \mathbf{s}_{h_p, \epsilon^c} \epsilon^c + \mathbf{J}_{h_p, \epsilon^c} \mathbf{g}^c + \mathbf{s}_{h_o} + \mathbf{s}_{h_o, \epsilon^c} \epsilon^c + \mathbf{J}_{h_o, \epsilon^c} \mathbf{g}^c + \mathbf{s}_{k_p, \epsilon^c} + \mathbf{s}_{l_a, \epsilon^c} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{M}_{\Omega_l^c, \mathbf{g}^c}^\perp = \mathbf{s}_{h_p, \mathbf{g}^c} \epsilon^c + \mathbf{J}_{h_p} + \mathbf{J}_{h_p, \mathbf{g}^c}^T \mathbf{g}^c + \mathbf{s}_{h_o, \mathbf{g}^c} \epsilon^c + \mathbf{J}_{h_o} + \mathbf{J}_{h_o, \mathbf{g}^c}^T \mathbf{g}^c + \mathbf{s}_{k_p, \mathbf{g}^c} + \mathbf{s}_{l_a, \mathbf{g}^c} \quad (4.24)$$

dove la virgola indica differenziazione, per esempio $N_{\Omega_l^c, \epsilon^c} = \partial N_{\Omega_l^c} / \partial \epsilon^c$, e $(\cdot)^T$ indica la trasposizione.

Il terzo ed il sesto addendo a secondo membro dell'ultima formula sono espressi in notazione indiciale come:

$$\{\mathbf{J}_{f, \mathbf{g}^c}^T \mathbf{g}^c\}_{ij} = \{\mathbf{J}_{f, \mathbf{g}^c}\}_{ik, j} \{\mathbf{g}^c\}_k \quad (4.25)$$

Si noti che le derivate rispetto a ϵ^c e \mathbf{g}^c degli integrali definiti su Ω_{lbp}^c , Ω_{lbo}^c e Ω_{la}^c , non si annullano poichè i loro domini di integrazione dipendono da ϵ^c e \mathbf{g}^c .

La valutazione analitica degli integrali (4.17), proposta in [56], è brevemente riassunta nel paragrafo seguente, principalmente per introdurre la terminologia di base necessaria per valutare analiticamente la matrice di rigidezza.

4.2 Valutazione delle caratteristiche della sollecitazione per un dominio poligonale

Le formule di base per valutare in forma analitica gli integrali (4.17) sono state sviluppate in [56]; ciascuna di esse consente di valutare analiticamente la risultante delle caratteristiche della sollecitazione per il generico dominio Ω_ϵ avente forma poligonale. A tal riguardo supponiamo che al generico istante t^c dell'analisi sia assegnato il campo delle deformazioni ϵ^c . Nelle formule seguenti l'apice c , che si riferisce all'istante corrente dell'analisi, è omesso per semplicità di notazione, sicchè i parametri correnti della deformazione ϵ^c e \mathbf{g}^c saranno trascritti come ϵ e \mathbf{g} .

Per brevità, in questo paragrafo si descriveranno in maggiore dettaglio le formule per valutare A_f mentre le altre, ricavate in [56], sono riassunte alla fine di questo paragrafo; in particolare tutti i simboli usati sono raggruppati nella tabella 4.1.

Come dimostrato in [56]

$$A_f = \begin{cases} \hat{A}_f & \text{if } |\Delta\epsilon| \geq \text{tol}_{\mathbf{g}} \\ A_{f_4} & \text{if } |\Delta\epsilon| < \text{tol}_{\mathbf{g}} \end{cases} \quad (4.26)$$

dove

$$\hat{A}_f = \sum_{i=1}^n l_i(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] \quad (4.27)$$

ed il vettore $\hat{\mathbf{g}}$ è definito da:

$$\hat{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} \quad (4.28)$$

Pertanto \hat{A}_f non è definito quando $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, cioè quando $|\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}| = 0$. Dal punto di vista computazionale questo significa che la formula relativa a \hat{A}_f diventa numericamente instabile quando $\epsilon_{\max} \rightarrow \epsilon_{\min}$. Di conseguenza, la formula (4.27) necessita di essere sostituita da un'espressione che sia ben definita quando $|\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}| < \text{tol}_{\mathbf{g}}$, relazione che esprime numericamente la condizione $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, essendo $\text{tol}_{\mathbf{g}}$ definisce un'adeguata tolleranza.

Per questa ragione è stata introdotta l'espansione di Taylor al quarto ordine della funzione f intorno al valore corrente della deformazione assiale in modo tale che ϵ , quando $|\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}| \rightarrow 0$, A_f è approssimato con

$$A_{f_4} = \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(k-j)}(\epsilon)}{j!} \mathbf{I}_j \cdot \mathbf{g}^{\otimes j} \quad (4.29)$$

una espressione che è sempre ben definita e approssima con continuità A_f quando $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{0}$, come mostrato numericamente in [56].

Le formule per valutare gli integrali \mathbf{s}_f e \mathbf{J}_f dell'equazione (4.17) sono state sviluppate in maniera simile e sono riassunte nella tabella 4.2 dove le formule di A_f sono ripetute per convenienza del lettore.

La funzione $\hat{\Phi}_i^0[f]$ che appare in (4.27) è valutata come

$$\hat{\Phi}_i^0[f] = \begin{cases} \Phi_i^0[f] & \text{if } |\Delta\varepsilon_i| > tol_\varepsilon \\ \Phi_i^0[f_4] & \text{if } |\Delta\varepsilon_i| < tol_\varepsilon \end{cases} \quad (4.30)$$

dove

$$\Phi_i^0[f] = \frac{[f^{(+1)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i} \quad (4.31)$$

e non è definita quando $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i$. Ciò rende l'integrale $\Phi_i^0[f]$ numericamente instabile quando $|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i| \rightarrow 0$ cosicchè, quando $|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i| < tol_\varepsilon$, è necessario sostituire $\Phi_i^0[f]$ con

$$\Phi_i^0[f_4] = f(\bar{\varepsilon}_i) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{24} \Delta\varepsilon_i^2 \quad (4.32)$$

il quale è ottenuto dall'espansione di Taylor della funzione f sino al quarto ordine intorno al valore $\bar{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})/2$.

Per convenienza del lettore, le formule per valutare le funzioni tipo $\hat{\Phi}_i^j[f]$, con $j = 0, 1, 2$ sono riportate nella tabella 4.3.

Infine, il termine $\mathbf{I}_j \cdot \mathbf{g}^{\otimes j}$ che compare in (4.29) deriva dalla specializzazione della formula generale per $\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-l)}$

$$\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-l)} = M \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \mathbf{H}_i \quad m \geq l \quad (4.33)$$

dove

$$M = \frac{1}{(m+2)(m+1)} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{H}_i = \sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^l \frac{C_{(j-h)}^{(m-l)}}{C_j^m} R_{(m-j-l+h)\mathbf{r}_i}^{(j-h)\mathbf{r}_{i+1}} \mathbf{S}_{(l-h)\mathbf{r}_i}^{h\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq l \quad (4.35)$$

Poichè la formula (4.33) è usata per valutare rispettivamente A_{f_4} , \mathbf{s}_{f_4} e \mathbf{J}_{f_4} con $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$, è utile riportare queste specializzazioni per tutti i casi:

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{g}^{\otimes m} = M \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq 0 \quad (4.36)$$

per $l = 0$ e

$$\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-1)} = M \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\alpha_i \mathbf{r}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{r}_{i+1}) \right] \quad m \geq 1 \quad (4.37)$$

$$\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-2)} = M \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} [\alpha_{ii} \mathbf{R}_{ii} + \alpha_{i+1\ i+1} \mathbf{R}_{i+1\ i+1} + \right. \\ \left. + 2\alpha_{ii+1} \text{sym} \mathbf{R}_{ii+1}] \right\} \quad m \geq 2 \quad (4.38)$$

rispettivamente per $l = 1$ and $l = 2$.

Le derivate di A_f , \mathbf{s}_f e \mathbf{J}_f rispetto a ϵ e \mathbf{g} , necessarie per calcolare la matrice di rigidezza (4.21)-(4.24) sono descritte nel prossimo paragrafo.

4.3 Valutazione della matrice di rigidezza di un dominio poligonale

Assegnata una legge costitutiva elasto-plastica uniassiale espressa nella forma (4.13) i termini della matrice di rigidezza sono forniti dalle formule (4.21)-(4.24). Pertanto, in considerazione delle (4.18) e (4.19), è possibile valutare le derivate degli integrali definiti dalla (4.17) rispetto ai parametri di deformazione ϵ^c e \mathbf{g}^c che compaiono in (4.1).

Queste derivate saranno denominate con $A_{f,(\cdot)}$, $\mathbf{s}_{f,(\cdot)}$ e $\mathbf{J}_{f,(\cdot)}$, dove il simbolo (\cdot) indica sia ϵ che \mathbf{g} , simboli utilizzati per semplicità al posto ϵ^c e \mathbf{g}^c .

A tal riguardo, ricordiamo che la funzione f indica una delle funzioni $h : \epsilon^l \rightarrow h(\epsilon^l)$, $k : \epsilon^l \rightarrow k(\epsilon^l)$ e $l : \epsilon^c \rightarrow l(\epsilon^c)$ mentre il dominio d'integrazione Ω_ϵ si riferisce al generico sottodominio Ω_{la}^c , Ω_{lbp}^c o Ω_{lbo}^c .

Una volta valutati i termini relativi al generico sottodominio, la matrice di rigidezza di tutta la sezione è banalmente ottenuta come somma dei contributi separati (4.20).

Analogamente la risultante degli tensioni sarà valutata come somma dei valori attinti da opportune quantità definite esclusivamente nei vertici di Ω_ϵ . In particolare, poichè Ω_ϵ dipende dalla deformazione corrente ed è definito per mezzo dei vertici \mathbf{r}_i del suo contorno, le derivate A_f , \mathbf{s}_f e \mathbf{J}_f devono contenere i termini $\mathbf{r}_{i,\epsilon}$ e $\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}$. Tali espressioni sono riportate nella sezione 4.4.

Procediamo ora sistematicamente a valutare le derivate di A_f , \mathbf{s}_f e \mathbf{J}_f rispetto a ϵ e \mathbf{g} . Poichè esse assumono espressioni differenti in funzione del valore $|\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}|$, si veda ad esempio la formula (4.26) e quelle simili in tabella 4.2, deriveremo separatamente le formule per \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$, $\hat{\mathbf{J}}_f$ e quelle per A_{f_4} , \mathbf{s}_{f_4} e \mathbf{J}_{f_4} .

Per semplicità esse saranno indicate rispettivamente come $(\hat{\cdot})_f$ e $(\cdot)_{f_4}$.

Nel seguito valuteremo per prima $(\hat{\cdot})_{f,\epsilon}$ nel paragrafo 4.3.1 e $(\cdot)_{f_4,\epsilon}$ nel paragrafo 4.3.2.

Il primo insieme richiede le derivate di $\hat{\Phi}_i^j[f]$, rispetto a ϵ , $j = 0, 1, 2$, si veda la tabella

4.3, ovvero le derivate di $\Phi_i^j[f]$ e $\Phi_i^j[f_4]$, $j = 0, 1, 2$; ciò viene illustrato nel sottoparagrafo 4.3.1.

Al contrario, le tre derivate $(\cdot)_{f_4, \epsilon}$ richiedono la differenziazione dei prodotti $\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes m-l}$, ciò che viene mostrato nel sottoparagrafo 4.3.2.

4.3.1 Derivate di \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$ e $\hat{\mathbf{J}}_f$ rispetto a ϵ

Differenziando le espressioni nella tabella 4.2 si ha

$$\hat{A}_{f, \epsilon} = \sum_{i=1}^n \left\{ (l_i \mathbf{n}_i)_{, \epsilon} \cdot \hat{\mathbf{g}} \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] + l_i \mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}} \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^0[f^{(+1)}] \right\} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{f, \epsilon} = & \sum_{i=1}^n \left\{ (l_i \mathbf{n}_i)_{, \epsilon} \cdot \hat{\mathbf{g}} \left\{ \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] \mathbf{r}_i + \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}] \Delta \mathbf{r}_i - \hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}] \hat{\mathbf{g}} \right\} + \right. \\ & + l_i \mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}} \left\{ \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^0[f^{(+1)}] \mathbf{r}_i + \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^1[f^{(+1)}] \Delta \mathbf{r}_i - \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^0[f^{(+2)}] \hat{\mathbf{g}} + \right. \\ & \left. \left. + \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] \mathbf{r}_{i, \epsilon} + \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}] \Delta \mathbf{r}_{i, \epsilon} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{f, \epsilon} = \sum_{i=1}^n [(l_i \mathbf{n}_i)_{, \epsilon} \cdot \hat{\mathbf{g}}] \mathbf{D}_i + (l_i \mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}}) \mathbf{D}_{i, \epsilon} \quad (4.41)$$

dove la derivata $(l_i \mathbf{n}_i)_{, \epsilon}$ è riportata nella sezione 4.4,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i, \epsilon} = & \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^0[f^{(+1)}] \mathbf{R}_{i, i} + \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] (\mathbf{r}_{i, \epsilon} \otimes \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i, \epsilon}) + 2 \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^1[f^{(+1)}] \text{sym}(\mathbf{r}_i \otimes \Delta \mathbf{r}_i) + \\ & + 2 \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}] \text{sym}(\mathbf{r}_{i, \epsilon} \otimes \Delta \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i \otimes \Delta \mathbf{r}_{i, \epsilon}) + \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^2[f^{(+1)}] \Delta \mathbf{r}_i \otimes \Delta \mathbf{r}_i + \\ & + 2 \hat{\Phi}_i^2[f^{(+1)}] \text{sym}(\Delta \mathbf{r}_{i, \epsilon} \otimes \Delta \mathbf{r}_i) - 2 \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^0[f^{(+2)}] \text{sym}(\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}) + \\ & - 2 \hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}] \text{sym}(\mathbf{r}_{i, \epsilon} \otimes \hat{\mathbf{g}}) - 2 \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^1[f^{(+2)}] \text{sym}(\Delta \mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}) + \\ & - 2 \hat{\Phi}_i^1[f^{(+2)}] \text{sym}(\Delta \mathbf{r}_{i, \epsilon} \otimes \hat{\mathbf{g}}) + 2 \hat{\Phi}_{i, \epsilon}^0[f^{(+3)}] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

e le derivate $\mathbf{r}_{i, \epsilon}$ così come $\Delta \mathbf{r}_{i, \epsilon} = \mathbf{r}_{i+1, \epsilon} - \mathbf{r}_{i, \epsilon}$ possono essere trovate in [54]. Infine, le derivate $\hat{\Phi}_{i, \epsilon}^j$ sono riportate qui di seguito.

Derivate della quantità $\hat{\Phi}_i^j[f]$ rispetto a ϵ

Richiamando le formule nella tabella 4.3 si ha

$$\hat{\Phi}_{i, \epsilon}^j[f] = \begin{cases} \Phi_{i, \epsilon}^j[f] & \text{if } |\Delta \varepsilon_i| \geq \text{tol}_\varepsilon \\ \Phi_{i, \epsilon}^j[f_4] & \text{if } |\Delta \varepsilon_i| < \text{tol}_\varepsilon \end{cases} \quad (4.43)$$

dove

$$\Phi_{i, \epsilon}^0[f] = \frac{[f^{(+1)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta \varepsilon_i} - \frac{[f^{(+1)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \Delta \varepsilon_{i, \epsilon}}{\Delta \varepsilon_i^2} \quad \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\epsilon}^1[f(\varepsilon)] &= \frac{f_{,\epsilon}^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i} - \frac{f^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})\Delta\varepsilon_{i,\epsilon}}{\Delta\varepsilon_i^2} - \frac{[f_{,\epsilon}^{(+2)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i^2} + \\ &\quad + 2 \frac{[f^{(+2)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \Delta\varepsilon_{i,\epsilon}}{\Delta\varepsilon_i^3} \quad \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\epsilon}^2[f] &= \frac{f_{,\epsilon}^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i} - \frac{f^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})\Delta\varepsilon_{i,\epsilon}}{\Delta\varepsilon_i^2} - 2 \frac{f_{,\epsilon}^{(+2)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i^2} + 4 \frac{f^{(+2)}(\varepsilon_{i+1})\Delta\varepsilon_{i,\epsilon}}{\Delta\varepsilon_i^3} + \\ &\quad + 2 \frac{[f_{,\epsilon}^{(+3)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i^3} - 6 \frac{[f^{(+3)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \Delta\varepsilon_{i,\epsilon}}{\Delta\varepsilon_i^4} \quad \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1} \end{aligned} \quad (4.46)$$

e si è posto

$$[f_{,\epsilon}^{(+k)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} = f_{,\epsilon}^{(+k)}(\varepsilon_{i+1}) - f_{,\epsilon}^{(+k)}(\varepsilon_i) \quad k \geq 1 \quad (4.47)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\epsilon}^0[f_4] &= \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{2}(\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}\Delta\varepsilon_i\Delta\varepsilon_{i,\epsilon} + \\ &\quad + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{48}\Delta\varepsilon_i^2(\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \frac{f^{(-4)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3\Delta\varepsilon_{i,\epsilon} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\epsilon}^1[f_4] &= \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{6}(2\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}\Delta\varepsilon_i\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \\ &\quad + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{192}\Delta\varepsilon_i^2(3\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \frac{f^{(-4)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3\varepsilon_{i+1,\epsilon} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\epsilon}^2[f_4] &= \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}(3\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{192}\Delta\varepsilon_i(15\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \\ &\quad + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^2(5\varepsilon_{i+1,\epsilon} + \varepsilon_{i,\epsilon}) + \frac{f^{(-4)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3\varepsilon_{i+1,\epsilon} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Le espressioni delle derivate $\varepsilon_{i,\epsilon}$, $\varepsilon_{i+1,\epsilon}$, $\Delta\varepsilon_{i,\epsilon} = \varepsilon_{i+1,\epsilon} - \varepsilon_{i,\epsilon}$ e $f_{,\epsilon}^{(+j)}(\cdot)$, $j = 0, 1, 2, 3$, possono essere trovate nell'appendice 4.4.

4.3.2 Derivate di A_{f_4} , \mathbf{s}_{f_4} e \mathbf{J}_{f_4} rispetto a ϵ

Le espressioni nella tabella 4.2 forniscono

$$A_{f_4,\epsilon} = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} \left(f^{(-j-1)}(\epsilon) \mathbf{I}_j \cdot \mathbf{g}^{\otimes j} + f^{(-j)}(\epsilon) \mathbf{I}_{j,\epsilon} \cdot \mathbf{g}^{\otimes j} \right) \quad (4.51)$$

$$\mathbf{s}_{f_4,\epsilon} = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} \left(f^{(-j-1)}(\epsilon) \mathbf{I}_{j+1} \mathbf{g}^{\otimes j} + f^{(-j)}(\epsilon) \mathbf{I}_{j+1,\epsilon} \mathbf{g}^{\otimes j} \right) \quad (4.52)$$

$$\mathbf{J}_{f_4,\epsilon} = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} \left(f^{(-j-1)}(\epsilon) \mathbf{I}_{j+2} \mathbf{g}^{\otimes j} + f^{(-j)}(\epsilon) \mathbf{I}_{j+2,\epsilon} \mathbf{g}^{\otimes j} \right) \quad (4.53)$$

dove le quantità riportate $\mathbf{I}_{m,\epsilon} \mathbf{g}^{\otimes(m-l)}$ sono dettagliate dopo.

Derivate della quantità $\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-l)}$ rispetto a ϵ

Per semplificare la determinazione delle derivate richieste è più conveniente richiamare la formula generale (4.33) a partire dalla quale sono state derivate le formule (4.36)-(4.38). Perciò si ha

$$\mathbf{I}_{m,\epsilon} \mathbf{g}^{\otimes(m-l)} = M \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\epsilon} \mathbf{H}_i + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \mathbf{H}_{i,\epsilon} \right] \quad (4.54)$$

dove i valori $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\epsilon}$ possono essere trovati in [54].

Il tensore $\mathbf{H}_{i,\epsilon}$ è derivato dalla formula (4.35) come

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i,\epsilon} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} \sum_{h=0}^l C_{(j-h)}^{(m-l)} \left\{ \left[R_{(m-j-l+h)\mathbf{r}_i}^{(j-h)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \mathbf{S}_{(l-h)\mathbf{r}_i}^{h\mathbf{r}_{i+1}} + \right. \\ \left. + R_{(m-j-l+h)\mathbf{r}_i}^{(j-h)\mathbf{r}_{i+1}} \left[\mathbf{S}_{(l-h)\mathbf{r}_i}^{h\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

in cui la derivata di $\mathbf{S}_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}}$ è ottenuta differenziando la corrispondente espressione in tabella 4.1

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i,\epsilon} \otimes \mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}} + \mathbf{r}_i \otimes [\mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} + \\ + \mathbf{r}_{i+1,\epsilon} \otimes \mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes [\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} \end{aligned} \quad a, b \geq 1 \quad (4.56)$$

Dato che la formula è ricorsiva, è necessario fissare i valori iniziali $a = 1$ e $b = 1$. Richiamando le formule nella tabella 4.1, è semplice ricavare $[\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} = 0$, $[\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{1\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i+1,\epsilon}$, $[\mathbf{S}_{1\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i,\epsilon}$,

$$[\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i+1,\epsilon} \otimes \mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes [\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} \quad a > 1 \quad (4.57)$$

e

$$[\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i,\epsilon} \otimes \mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}} + \mathbf{r}_i \otimes [\mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\epsilon} \quad b > 1 \quad (4.58)$$

Pertanto, per $l = 0$, le formule (4.54) e (4.55) si specializzano come di seguito

$$\mathbf{I}_{m,\epsilon} \cdot \mathbf{g}^{\otimes m} = M \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\epsilon} \sum_{j=0}^m R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \left[R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \right\} \quad (4.59)$$

dove

$$(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i,\epsilon} \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1,\epsilon}^\perp \quad (4.60)$$

e la valutazione delle derivate $\mathbf{r}_{i,\epsilon}$ e $\mathbf{r}_{i+1,\epsilon}$ è dettagliata in [54].

La derivata di $R_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}$ in (4.59) si ottiene da

$$\begin{aligned} (R_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\epsilon} = b(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g})^{b-1} (\mathbf{r}_{i,\epsilon} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g})^a + \\ + a(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g})^b (\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g})^{a-1} (\mathbf{r}_{i+1,\epsilon} \cdot \mathbf{g}) \end{aligned} \quad a \geq 0, b \geq 0 \quad (4.61)$$

La precedente formula è definita anche quando $a = 0$ ($b = 0$) poiché il secondo (primo) fattore di $R_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}$ è 1 ed il secondo (primo) addendo di $(R_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\epsilon}$ manca. Dato che $R_{0\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}} = 1$ e $(R_{0\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}})_{,\epsilon} = 0$, la formula (4.59) può essere usata anche quando $m = 0$.

Inoltre, per $l = 1$, si ottiene dalla (4.54)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{m,\epsilon} \mathbf{g}^{\otimes(m-1)} = M \sum_{i=1}^n & \left[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\epsilon} \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\alpha_i \mathbf{r}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{r}_{i+1}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\alpha_{i,\epsilon} \mathbf{r}_i + \alpha_i \mathbf{r}_{i,\epsilon} + \alpha_{i+1,\epsilon} \mathbf{r}_{i+1} + \alpha_{i+1} \mathbf{r}_{i+1,\epsilon}) \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

$m \geq 1$

dove

$$\alpha_{i,\epsilon} = C_j^{(m-1)} \left[R_{(m-j-1)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \quad \alpha_{i+1,\epsilon} = C_{(j-1)}^{(m-1)} \left[R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{(j-1)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \quad (4.63)$$

Infine, per $l = 2$, la formula (4.54) fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{m,\epsilon} \mathbf{g}^{\otimes(m-2)} = & \\ = M \sum_{i=1}^n & \left\{ (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\epsilon} \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} [\alpha_{ii} \mathbf{R}_{ii} + \alpha_{i+1\ i+1} \mathbf{R}_{i+1\ i+1} + 2\alpha_{i\ i+1} \text{sym} \mathbf{R}_{i\ i+1}] + \right. \\ & + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} [\alpha_{ii,\epsilon} \mathbf{R}_{ii} + \alpha_{ii} \mathbf{R}_{ii,\epsilon} + \alpha_{i+1\ i+1,\epsilon} \mathbf{R}_{i+1\ i+1} + \\ & + \alpha_{i+1\ i+1} \mathbf{R}_{i+1\ i+1,\epsilon} + 2\alpha_{i\ i+1,\epsilon} \text{sym} \mathbf{R}_{i\ i+1} \\ & \left. + 2\alpha_{i\ i+1} \text{sym} \mathbf{R}_{i\ i+1,\epsilon}] \right\} \end{aligned} \quad (4.64)$$

$m \geq 2$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_{ii,\epsilon} = C_j^{(m-2)} & \left[R_{(m-j-2)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \quad \alpha_{i+1,\epsilon} = C_{(j-1)}^{(m-2)} \left[R_{(m-j-1)\mathbf{r}_i}^{(j-1)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \\ \alpha_{i+1\ i+1,\epsilon} = C_{(j-2)}^{(m-2)} & \left[R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{(j-2)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\epsilon} \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ii,\epsilon} = \mathbf{r}_{i,\epsilon} \otimes \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i,\epsilon} \quad \mathbf{R}_{i+1\ i+1,\epsilon} = \mathbf{r}_{i+1,\epsilon} \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1,\epsilon} \\ \text{sym} \mathbf{R}_{i\ i+1,\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{i,\epsilon} \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1,\epsilon} + \mathbf{r}_{i+1,\epsilon} \otimes \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i,\epsilon}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.3.3 Derivate \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$ e $\hat{\mathbf{J}}_f$ rispetto a \mathbf{g}

Per le espressioni nella tabella 4.2 si ottiene

$$\hat{A}_{f,\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^n \left\{ (l_i \mathbf{n}_i)^T_{,\mathbf{g}} \hat{\mathbf{g}} \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] + \hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}}^T \mathbf{n}_i l_i \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] + l_i \mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}} \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^0[f^{(+1)}] \right\} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}_{f,\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}]\mathbf{r}_i + \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}]\Delta\mathbf{r}_i - \hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}]\hat{\mathbf{g}} \right\} \otimes \left\{ (l_i\mathbf{n}_i)^T_{,\mathbf{g}}\hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}}^T_{,\mathbf{g}}\mathbf{n}_il_i \right\} + \right. \\
\left. + l_i\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}} \left\{ \mathbf{r}_i \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^0[f^{(+1)}] + \Delta\mathbf{r}_i \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^1[f^{(+1)}] - \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^0[f^{(+2)}] + \right. \right. \\
\left. \left. + \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}]\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} + \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}]\Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} - \hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}]\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} \right\} \right\} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{f,\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i \otimes \left[(l_i\mathbf{n}_i)^T_{,\mathbf{g}}\hat{\mathbf{g}} + (\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}})^T\mathbf{n}_il_i \right] + (l_i\mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}}) \mathbf{D}_{i,\mathbf{g}} \quad (4.69)$$

dove le derivate $(l_i\mathbf{n}_i)_{,\mathbf{g}}$ e $\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}}$ sono dettagliate nella sezione 4.4,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{i,\mathbf{g}} = \mathbf{R}_{ii} \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^0[f^{(+1)}] + \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] [(\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i)^T + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}] + \\
+ 2\text{sym}(\mathbf{r}_i \otimes \Delta\mathbf{r}_i) \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^1[f^{(+1)}] + \\
+ \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}] [(\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \Delta\mathbf{r}_i)^T + \mathbf{r}_i \otimes \Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} + (\Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i)^T + \Delta\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}] + \\
+ (\Delta\mathbf{r}_i \otimes \Delta\mathbf{r}_i) \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^2[f^{(+1)}] + \hat{\Phi}_i^2[f^{(+1)}] [(\Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \Delta\mathbf{r}_i)^T + \Delta\mathbf{r}_i \otimes \Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}] + \\
- 2\text{sym}(\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}) \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^0[f^{(+2)}] + \\
- \hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}] [(\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}})^T + \mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} + (\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i)^T + \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}] + \\
- 2\text{sym}(\Delta\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}) \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^1[f^{(+2)}] + \\
- \hat{\Phi}_i^1[f^{(+2)}] [(\Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}})^T + \Delta\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} + (\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} \otimes \Delta\mathbf{r}_i)^T + \hat{\mathbf{g}} \otimes \Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}] + \\
+ 2(\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \otimes \hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^0[f^{(+3)}] + 2\hat{\Phi}_i^0[f^{(+3)}] [(\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}})^T + \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}}] \quad (4.70)
\end{aligned}$$

mentre le derivate $\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}$, così come quelle $\Delta\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} = \mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} - \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}$ possono essere trovate in [54].

Infine le derivate di $\hat{\Phi}_i^j[f]$ sono riportate nella prossima sottosezione.

Derivate delle quantità $\hat{\Phi}_i^j[f]$ rispetto a \mathbf{g}

Richiamando le formule in tabella 4.3 si ha

$$\hat{\Phi}_{i,\mathbf{g}}^j[f] = \begin{cases} \Phi_{i,\mathbf{g}}^j[f] & \text{if } |\Delta\varepsilon_i| \geq \text{tol}_\varepsilon \\ \Phi_{i,\mathbf{g}}^j[f_4] & \text{if } |\Delta\varepsilon_i| < \text{tol}_\varepsilon \end{cases} \quad (4.71)$$

dove

$$\Phi_{i,\mathbf{g}}^0[f] = \frac{[f_{,\mathbf{g}}^{(+1)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i} - \frac{[f^{(+1)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}}}{\Delta\varepsilon_i^2} \quad (4.72)$$

$$\Phi_{i,\mathbf{g}}^1[f] = \frac{f_{,\mathbf{g}}^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i} - \frac{[f_{,\mathbf{g}}^{(+2)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i^2} - \frac{f^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})\Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}}}{\Delta\varepsilon_i^2} + 2 \frac{[f^{(+2)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}}}{\Delta\varepsilon_i^3} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\mathbf{g}}^2[f] = & \frac{f_{,\mathbf{g}}^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i} - \frac{f^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})\Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}}}{\Delta\varepsilon_i^2} - 2\frac{f_{,\mathbf{g}}^{(+2)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i^2} + 2\frac{\left[f_{,\mathbf{g}}^{(+3)}(\varepsilon)\right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i^3} + \\ & + 4\frac{f^{(+2)}(\varepsilon_{i+1})\Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}}}{\Delta\varepsilon_i^3} - 6\frac{\left[f^{(+3)}(\varepsilon)\right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}\Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}}}{\Delta\varepsilon_i^4} \end{aligned} \quad (4.74)$$

ed si è posto

$$\left[f_{,\mathbf{g}}^{(+k)}(\varepsilon)\right]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} = f_{,\mathbf{g}}^{(+k)}(\varepsilon_{i+1}) - f_{,\mathbf{g}}^{(+k)}(\varepsilon_i) \quad k \geq 1 \quad (4.75)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\mathbf{g}}^0[f_4] = & \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{2}(\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}\Delta\varepsilon_i\Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}} + \\ & + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{48}\Delta\varepsilon_i^2(\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \frac{f^{(-4)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3\Delta\varepsilon_{i,\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\mathbf{g}}^1[f_4] = & \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{6}(2\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}\Delta\varepsilon_i\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \\ & + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{192}\Delta\varepsilon_i^2(3\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \frac{f^{(-4)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\mathbf{g}}^2[f_4] = & \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}(3\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{192}\Delta\varepsilon_i(15\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \\ & + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^2(5\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} + \varepsilon_{i,\mathbf{g}}) + \frac{f^{(-4)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

La valutazione delle quantità $f_{,\mathbf{g}}^{(+j)}(\cdot)$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\varepsilon_{i,\mathbf{g}}$ e $\varepsilon_{i+1,\mathbf{g}}$ è dettagliata nelle formule (4.97) e (4.98) della sezione 4.4.

4.3.4 Derivate di A_{f_4} , s_{f_4} e J_{f_4} rispetto a \mathbf{g}

Dalle formule in tabella 4.2 si ha

$$A_{f_4,\mathbf{g}} = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} f^{(-j)}(\epsilon) (\mathbf{I}_j \cdot \mathbf{g}^{\otimes j})_{,\mathbf{g}} \quad (4.79)$$

$$s_{f_4,\mathbf{g}} = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} f^{(-j)}(\epsilon) (\mathbf{I}_{j+1} \mathbf{g}^{\otimes j})_{,\mathbf{g}} \quad (4.80)$$

$$\mathbf{J}_{f_4,\mathbf{g}} = \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} f^{(-j)}(\epsilon) (\mathbf{I}_{j+2} \mathbf{g}^{\otimes j})_{,\mathbf{g}} \quad (4.81)$$

e le derivate delle quantità $\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-l)}$ sono riportate nel sottoparagrafo seguente.

Derivate delle quantità $\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-l)}$ rispetto a \mathbf{g}

Differenziando la formula (4.33) rispetto a \mathbf{g} si ottiene la seguente formula

$$[\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-l)}]_{,\mathbf{g}} = M \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{H}_i \otimes (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\mathbf{g}} + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \mathbf{H}_{i,\mathbf{g}} \right] \quad (4.82)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i,\mathbf{g}} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} \sum_{h=0}^l C_{(j-h)}^{(m-l)} \left\{ \mathbf{S}_{(l-h)\mathbf{r}_i}^{h\mathbf{r}_{i+1}} \otimes [R_{(m-j-l+h)\mathbf{r}_i}^{(j-h)\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} + \right. \\ \left. + R_{(m-j-l+h)\mathbf{r}_i}^{(j-h)\mathbf{r}_{i+1}} [\mathbf{S}_{(l-h)\mathbf{r}_i}^{h\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} \right\} \end{aligned} \quad (4.83)$$

La derivata di $\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}$ rispetto a \mathbf{g} è fornita da

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = [\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}]^T + \mathbf{r}_i \otimes [\mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} + \\ + [\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}}]^T + \mathbf{r}_{i+1} \otimes [\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} \end{aligned} \quad a, b \geq 1 \quad (4.84)$$

e le derivate di $\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}$ e $\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}}$ sono dettagliate in [54].

Ponendo $(\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{1\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = \mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}}$ e $(\mathbf{S}_{1\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}$ le quantità $(\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}}$ e $(\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}}$ sono determinate come:

$$(\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = [\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}}]^T + \mathbf{r}_{i+1} \otimes [\mathbf{S}_{0\mathbf{r}_i}^{(a-1)\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} \quad a > 1 \quad (4.85)$$

e

$$(\mathbf{S}_{b\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = [\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}}]^T + \mathbf{r}_i \otimes [\mathbf{S}_{(b-1)\mathbf{r}_i}^{0\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} \quad b > 1 \quad (4.86)$$

Pertanto, la specializzazione delle formule (4.82) e (4.83) per $l = 0$ fornisce

$$(\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{g}^{\otimes m})_{,\mathbf{g}} = M \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\mathbf{g}} \sum_{j=0}^m R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m [R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}}]_{,\mathbf{g}} \right\} \quad (4.87)$$

dove le derivate $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\mathbf{g}}$ e $(R_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}}$, che compaiono nella formula precedente, sono valutate rispettivamente come:

$$(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\mathbf{g}} = (\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}})^T \mathbf{r}_{i+1}^\perp + (\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}}^\perp)^T \mathbf{r}_i \quad (4.88)$$

e

$$\begin{aligned} (R_{b\mathbf{r}_i}^{a\mathbf{r}_{i+1}})_{,\mathbf{g}} = b(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g})^{b-1}(\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g})^a [(\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}})^T \mathbf{g} + \mathbf{r}_i] + \\ + a(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g})^b(\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g})^{a-1} [(\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}})^T \mathbf{g} + \mathbf{r}_{i+1}] \quad a \geq 0, b \geq 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

Come per le derivate rispetto a ϵ riportate sopra, le formule precedenti sono utilizzate anche quando $a = 0$ e/o $b = 0$ e/o $m = 0$.

Inoltre per $l = 1$ si deduce da (4.82) e (4.83)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-1)}]_{,\mathbf{g}} &= \\
&= M \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\alpha_i \mathbf{r}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{r}_{i+1}) \otimes (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\mathbf{g}} + \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\mathbf{r}_i \otimes \alpha_{i,\mathbf{g}} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \alpha_{i+1,\mathbf{g}} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_i \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} + \alpha_{i+1} \mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}}) \right] \quad m \geq 1
\end{aligned} \tag{4.90}$$

dove

$$\alpha_{i,\mathbf{g}} = C_j^{(m-1)} \left[R_{(m-j-1)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\mathbf{g}} \quad \alpha_{i+1,\mathbf{g}} = C_{(j-1)}^{(m-1)} \left[R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{(j-1)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\mathbf{g}} \tag{4.91}$$

Infine, per $l = 2$ le formule (4.82) e (4.83) forniscono

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}_m \mathbf{g}^{\otimes(m-2)}]_{,\mathbf{g}} &= \\
&= M \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\alpha_{ii} \mathbf{R}_{ii} + \alpha_{i+1\,i+1} \mathbf{R}_{i+1\,i+1} + 2\alpha_{i\,i+1} \text{sym} \mathbf{R}_{i\,i+1}) \otimes (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)_{,\mathbf{g}} + \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \sum_{j=0}^m \frac{1}{C_j^m} (\mathbf{R}_{ii} \otimes \alpha_{i,\mathbf{g}} + \alpha_{ii} \mathbf{R}_{i,\mathbf{g}} + \mathbf{R}_{i+1\,i+1} \otimes \alpha_{i+1\,i+1,\mathbf{g}} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{i+1\,i+1} \mathbf{R}_{i+1\,i+1,\mathbf{g}} + 2\text{sym} \mathbf{R}_{i\,i+1} \otimes \alpha_{i\,i+1,\mathbf{g}} + \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha_{i\,i+1} \text{sym} \mathbf{R}_{i\,i+1,\mathbf{g}}) \right] \quad m \geq 2
\end{aligned} \tag{4.92}$$

dove

$$\begin{aligned}
\alpha_{ii,\mathbf{g}} &= C_j^{(m-2)} \left[R_{(m-j-2)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\mathbf{g}} \quad \alpha_{i+1,\mathbf{g}} = C_{(j-1)}^{(m-2)} \left[R_{(m-j-1)\mathbf{r}_i}^{(j-1)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\mathbf{g}} \\
\alpha_{i+1\,i+1,\mathbf{g}} &= C_{(j-2)}^{(m-2)} \left[R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{(j-2)\mathbf{r}_{i+1}} \right]_{,\mathbf{g}}
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ii,\mathbf{g}} &= (\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i)^T + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \quad \mathbf{R}_{i+1\,i+1,\mathbf{g}} = (\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1})^T + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} \\
\text{sym} \mathbf{R}_{i\,i+1,\mathbf{g}} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1})^T + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} + (\mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i)^T + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}]
\end{aligned} \tag{4.94}$$

I tensori del tipo $(\mathbf{a}_{,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{B})^T$ che appaiono nell'equazione precedente, si esprimono in notazione indiciale come

$$\left[(\mathbf{a}_{,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{B})^T \right]_{ab_1 \dots b_k g} = (\mathbf{a}_{,\mathbf{g}} \otimes \mathbf{B})_{agb_1 \dots b_k} = a_{a,g} B_{b_1 \dots b_k} \tag{4.95}$$

4.4 Alcune formule utili

Nel seguito sono riportati i dettagli della valutazione di alcune grandezze che sono necessarie per esprimere compiutamente le derivate di \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$, $\hat{\mathbf{J}}_f$, come ad esempio le formule (4.39)-(4.41) e (4.51)-(4.53), oltre A_{f_4} , \mathbf{s}_{f_4} , \mathbf{J}_{f_4} nelle formule (4.67)-(4.69) e (4.79)-(4.81).

Derivando il vettore $l_i \mathbf{n}_i$, ortogonale all' i -esimo lato di Ω_ε e diretto verso l'esterno, si ottengono le seguenti formule

$$(l_i \mathbf{n}_i)_{,\epsilon} = \mathbf{r}_{i+1,\epsilon}^\perp - \mathbf{r}_{i,\epsilon}^\perp; \quad (l_i \mathbf{n}_i)_{,\mathbf{g}} = \mathbf{r}_{i+1,\mathbf{g}}^\perp - \mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}^\perp \quad (4.96)$$

Inoltre, ricordando le espressioni di \hat{A}_f , $\hat{\mathbf{s}}_f$ e $\hat{\mathbf{J}}_f$, si veda al riguardo la tabella 4.2, abbiamo bisogno di valutare le derivate di $f(\varepsilon_i)$ rispetto a ϵ e \mathbf{g} . Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f_{,\epsilon}(\varepsilon_i) = f^{(-1)}(\varepsilon_i) \varepsilon_{i,\epsilon}; \quad f_{,\mathbf{g}}(\varepsilon_i) = f^{(-1)}(\varepsilon_i) \varepsilon_{i,\mathbf{g}} \quad (4.97)$$

dove

$$\varepsilon_{i,\epsilon} = \left. \frac{d\varepsilon}{d\epsilon} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = 1 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{i,\epsilon}; \quad \varepsilon_{i,\mathbf{g}} = \left. \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = \mathbf{r}_i + [\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}]^T \mathbf{g} \quad (4.98)$$

sono ottenuti differenziando (4.1) mentre le derivate $\mathbf{r}_{i,\epsilon}$ e $\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}}$ sono riportate in [54].

Le derivate di ε_{i+1} rispetto a ϵ e \mathbf{g} sono ottenute in modo simile sostituendo nella formula precedente \mathbf{r}_i con \mathbf{r}_{i+1} .

Infine, è anche richiesta la derivata $\hat{\mathbf{g}}$ rispetto a \mathbf{g} . Richiamando la (4.28) risulta

$$\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} - 2 \frac{\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^2}, \quad \mathbf{g} \neq \mathbf{0} \quad (4.99)$$

dove \mathbf{I} è il tensore identità $2D$. Chiaramente, $\hat{\mathbf{g}}_{,\epsilon} = \mathbf{0}$.

Nota 1 Le formule precedenti sono state derivate assumendo che la funzione integranda f in (4.17) dipende dalla deformazione corrente ε^c . Qualora f dipenda da ε^l , come avviene per le funzioni h e k in (4.21)-(4.24), le derivate di ε^l rispetto a ϵ e \mathbf{g} devono essere calcolate in luogo delle derivate $d\varepsilon/d\epsilon$ e $d\varepsilon/d\mathbf{g}$ riportate in (4.98) insieme a $\hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}}^l$. Esse sono fornite da

$$\varepsilon_{i,\epsilon}^l = \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{r}_{i,\epsilon}; \quad \varepsilon_{i,\mathbf{g}}^l = (\mathbf{r}_{i,\mathbf{g}})^T \mathbf{g}^l; \quad \hat{\mathbf{g}}_{,\mathbf{g}}^l = \mathbf{0} \quad (4.100)$$

poiché i parametri di deformazione ϵ^l e \mathbf{g}^l sono indipendenti da ϵ e \mathbf{g} . ■

4.5 Risultati numerici

Allo scopo di validare le formule ricavate nei precedenti paragrafi, i risultati ottenuti dall'approccio fiber-free sono stati confrontati con quelli ottenuti usando il tradizionale approccio a fibre. In effetti, sebbene possano essere adottati diversi metodi numerici di integrazione nella sezione [99, 126], il metodo a fibre è senza dubbio il più diffuso tra i software commerciali per le analisi strutturali non lineari [70, 64]. A causa delle approssimazioni di quest'ultimo metodo è stato considerato un numero progressivamente crescente del numero delle fibre sia in funzione della memoria disponibile del computer, sia in considerazione della precisione macchina.

Si farà riferimento alla legge bilineare per enfatizzare il fatto che, persino per la più semplice legge costitutiva, per il calcestruzzo, si riscontrano errori significativi quando il numero delle fibre impiegate è quello di solito suggerito nei software per le analisi strutturali non lineari, cioè meno di un centinaio. Perciò, considerando altresì i risultati illustrati in [56] nei quali si è fatto riferimento alla legge di Karsan-Jirsa, si può concludere che il comportamento non soddisfacente del metodo a fibre non è da associare alla complessità della legge costitutiva, ma è intrinseco della procedura d'integrazione.

4.5.1 Legge bilineare tensioni-deformazioni priva di resistenza a trazione

Si consideri il caso di un legame costitutivo come quello raffigurato in figura 4.2 caratterizzata da una curva involucro di tipo bilineare

$$e(\varepsilon^c) = \begin{cases} e_1(\varepsilon^c) = (E_e - E_h)\varepsilon_y + E_h\varepsilon^c & \text{if } \varepsilon^c < \varepsilon_y \\ e_2(\varepsilon^c) = E_e\varepsilon^c & \text{if } \varepsilon_y \leq \varepsilon^c < 0 \\ e_3(\varepsilon^c) = 0 & \text{if } 0 \leq \varepsilon^c \end{cases} \quad (4.101)$$

dove $\varepsilon_y < 0$ è la deformazione di snervamento. I moduli elastico e di incrudimento sono rispettivamente E_e e E_h .

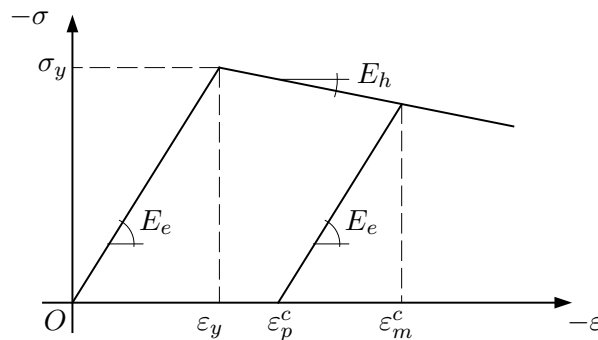


Figura 4.2: Legge bilineare sforzo-deformazione priva di resistenza a trazione

Una deformazione plastica è prodotta ogni volta che la deformazione ε_p raggiunge i valori al disotto della deformazione di snervamento, per esempio i valori ε^c a destra di ε_y nella fig. 4.2 in quanto si assumono positive le deformazioni associate con l'allungamento. Di conseguenza, nessuna deformazione plastica può essere prodotta nei punti della sezione in cui la massima deformazione da compressione non ha mai raggiunto la deformazione di snervamento in compressione, e cioè $\varepsilon_m^c > \varepsilon_y$. Viceversa, sulla parte rimanente della sezione, dove $\varepsilon_m^c \leq \varepsilon_y$, si attinge una deformazione plastica ed essa viene espressa come::

$$\varepsilon_p(\varepsilon_m^c) = \begin{cases} 0 & \text{if } \varepsilon_m^c > \varepsilon_y \\ p(\varepsilon_m^c) = \frac{(\varepsilon_m^c - \varepsilon_y)(E_e - E_h)}{E_e} & \text{if } \varepsilon_m^c \leq \varepsilon_y \end{cases} \quad (4.102)$$

Nota 2 Si ricordi che nell'approccio fiber-free tutti i punti della sezione per i quali la massima deformazione a compressione ε_m^c è definita per mezzo degli stessi parametri di deformazione $\{\varepsilon_m^c, \mathbf{g}_m^c\}$ sono raggruppati in un corrispondente sottodominio a che al tempo corrente t^c dell'analisi, la sezione è suddivisa in una serie di sottodomini, ognuno dei quali associato con una generica tripletta di valori $\{\varepsilon_m^c, \mathbf{g}_m^c\}$. Per questa ragione in seguito si farà riferimento al generico sottodominio Ω_i^c ponendo per semplicità $\varepsilon^l = \varepsilon_m^c$.

Gli elementi di base utilizzati per specializzare le formule dettagliate nel precedente paragrafo per la legge bilineare, sono riportati nel seguito.

4.6 Legge bilineare: le funzioni costitutive

Sulla base di (4.101) e (4.102), dove si è posto $\varepsilon_m^c = \varepsilon^l$, le funzioni h_p , h_o , k_p e l_a che compaiono nell'espressione generale (4.13) sono fornite dalle seguenti espressioni:

$$h_p(\varepsilon^l) = \frac{e_1(\varepsilon^l)}{\varepsilon^l - p(\varepsilon^l)} = E_e \quad (4.103)$$

$$h_o(\varepsilon^l) = \begin{cases} \frac{e_2(\varepsilon^l)}{\varepsilon^l} = h_{o1}(\varepsilon^l) = E_e & \text{if } \varepsilon^l \leq 0 \\ \frac{e_3(\varepsilon^l)}{\varepsilon^l} = h_{o2}(\varepsilon^l) = 0 & \text{if } 0 < \varepsilon^l \end{cases} \quad (4.104)$$

$$k_p(\varepsilon^l) = \frac{e_1(\varepsilon^l)p(\varepsilon^l)}{p(\varepsilon^l) - \varepsilon^l} = (E_h - E_e)(\varepsilon^l - \varepsilon_y) \quad (4.105)$$

e

$$l_a(\varepsilon^c) = \begin{cases} l_{a1}(\varepsilon^c) = e_1(\varepsilon^c) = (E_e - E_h)\varepsilon_y + E_h\varepsilon^c & \text{if } \varepsilon^c < \varepsilon_y \\ l_{a2}(\varepsilon^c) = e_2(\varepsilon^c) = E_e\varepsilon^c & \text{if } \varepsilon_y \leq \varepsilon^c < 0 \\ l_{a3}(\varepsilon^c) = e_3(\varepsilon^c) = 0 & \text{if } 0 \leq \varepsilon^c \end{cases} \quad (4.106)$$

4.6.1 Legge bilineare: Primitive delle funzioni costitutive

Sulla base delle espressioni precedenti si ha:

$$\begin{aligned} h_p^{(k)}(\varepsilon^l) &= h_{o1}^{(k)}(\varepsilon^l) = \frac{E_e(\varepsilon^l)^k}{k!} \\ h_{o2}^{(k)}(\varepsilon^l) &= 0 \\ k_p^{(k)}(\varepsilon^l) &= \frac{1}{(k+1)!}(\varepsilon^l)^k[\varepsilon^l - (k+1)\varepsilon_y](E_h - E_e) \end{aligned}$$

Per valutare le primitive della funzione l_a occorre determinare prima la primitiva l_{a2} come segue:

$$l_{a2}^{(k)}(\varepsilon^c) = \frac{(\varepsilon^c)^{(k+1)}E_e}{(k+1)!}.$$

dove $(\varepsilon^c)^{(k+1)}$ rappresenta la $(k+1)$ -esima potenza di ε^c . Successivamente, ponendo $l_{a1}^{(k)}(\varepsilon_y) = l_{a2}^{(k)}(\varepsilon_y)$ e $l_{a3}^{(k)}(0) = l_{a2}^{(k)}(0)$, si valutano le costanti di integrazione di $l_{a1}^{(k)}$ e $l_{a3}^{(k)}$ in modo da rispettare la continuità di $l_a^{(k)}$ per tutti i valori ε^c . Questo produce $l_{a3}^{(k)}(\varepsilon^c) = 0$ e

$$\begin{aligned} l_{a1}^{(1)}(\varepsilon^c) &= \frac{1}{2} [(\varepsilon^c)^2 E_h + 2\varepsilon^c \varepsilon_y (E_e - E_h) + \varepsilon_y^2 (E_h - E_e)], \\ l_{a1}^{(2)}(\varepsilon^c) &= \frac{1}{6} [(\varepsilon^c)^3 E_h + 3(\varepsilon^c)^2 \varepsilon_y (E_e - E_h) + 3\varepsilon^c \varepsilon_y^2 (E_h - E_e) + \\ &\quad + \varepsilon_y^3 (E_e - E_h)], \\ l_{a1}^{(3)}(\varepsilon^c) &= \frac{1}{24} [(\varepsilon^c)^4 E_h + 4(\varepsilon^c)^3 \varepsilon_y (E_e - E_h) + 6(\varepsilon^c)^2 \varepsilon_y^2 (E_h - E_e) + \\ &\quad + 4\varepsilon^c \varepsilon_y^3 (E_e - E_h) + \varepsilon_y^4 (E_h - E_e)] \end{aligned}$$

nonchè

$$\begin{aligned} l_{a1}^{(4)}(\varepsilon^c) &= \frac{1}{120} [(\varepsilon^c)^5 E_h + 5(\varepsilon^c)^4 \varepsilon_y (E_e - E_h) + 10(\varepsilon^c)^3 \varepsilon_y^2 (E_h - E_e) + \\ &\quad - 10(\varepsilon^c)^2 \varepsilon_y^3 (E_h - E_e) + 5\varepsilon^c \varepsilon_y^4 (E_h - E_e) + \varepsilon_y^5 (E_e - E_h)] \end{aligned}$$

4.6.2 Legge bilineare: Derivate delle funzioni costitutive

Richiamando le (4.103)-(4.106) le derivate sono:

$$\begin{aligned} h_p^{(-k)}(\varepsilon^l) &= h_{o1}^{(-k)}(\varepsilon^l) = h_{o2}^{(-k)}(\varepsilon^l) = 0 \quad \forall k \geq 1 \\ k_p^{(-1)}(\varepsilon^l) &= E_h - E_e \\ k_p^{(-k)}(\varepsilon^l) &= 0 \quad k > 1 \\ l_a^{(-1)}(\varepsilon^c) &= \begin{cases} E_h & \text{if } \varepsilon^c < \varepsilon_y \\ E_e & \text{if } \varepsilon_y \leq \varepsilon^c < 0 \\ 0 & \text{if } 0 \leq \varepsilon^c \end{cases} \\ l_a^{(-k)}(\varepsilon^l) &= 0 \quad k > 1 \end{aligned}$$

4.6.3 Integrazione di un modello costitutivo bilineare

Come esempio rappresentativo di alcuni test numerici che sono stati svolti si illustrano i risultati ottenuti per la sezione rettangolare, avente dimensione $0.4\text{ m} \times 0.6\text{ m}$, caratterizzata da un legame costitutivo bilineare in cui sono stati assunti i valori $E_e = 29600\text{ MPa}$, $E_h = -0.25 \times E_e$ e $\varepsilon_y = -0.0012$.

La sezione è stata analizzata in flessione retta, e cioè assumendo $\epsilon = 0$ e $g_y = 0$. E' stata eseguita un'analisi di carico-scarico, incrementando dapprima la componente g_x del gradiente della deformazione da 0 m^{-1} a 0.025 m^{-1} e, successivamente decrementandola sino a 0 m^{-1} . La curva $M_y - g_x$ ottenuta dall'approccio fiber-free è disegnata nella figura 4.5. Le risultanti delle tensioni e la relativa matrice delle rigidezze nel generico punto A della curva, sono

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ -M_y \\ M_x \end{array} \right\}_{A,FFa} = \left\{ \begin{array}{c} -2.912484367693880\text{ E}+000 \\ 0.319829798219210\text{ E}+000 \\ -1.181178109684253\text{ E}-017 \end{array} \right\} \quad (4.107)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N_{,\epsilon} & N_{,g_x} & N_{,g_y} \\ -M_{y,\epsilon} & -M_{y,g_x} & -M_{y,g_y} \\ M_{x,\epsilon} & M_{x,g_x} & M_{x,g_y} \end{array} \right\}_{A,FFa} = \left\{ \begin{array}{c} 7.945263957051850\text{ E}+002 \\ 25.041101976471101\text{ E}+000 \\ -4.756919173869813\text{ E}-015 \end{array} \right\} \quad (4.108)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 25.041101976471101\text{ E}+000 & 2.000425288380588\text{ E}-015 \\ -8.618497631061191\text{ E}+000 & 5.905890228316909\text{ E}-016 \\ 1.573418286092574\text{ E}-016 & 23.835791871155500\text{ E}+000 \end{array} \right\}$$

dove il suffisso FFa indica l'approccio fiber-free. Gli analoghi valori nell'altro arbitrario punto B sul ramo di scarico possono essere trovati in [56].

Si noti che lavorando con precisioni di macchina pari a 10^{-16} , i valori di M_x , $N_{,g_y}$, M_{y,g_y} , $M_{x,\epsilon}$ e M_{x,g_x} sono numericamente zero.

Allo scopo di raggiungere una precisione comparabile con quella ottenuta con l'approccio del fiber-free, la stessa analisi è stata condotta adottando una suddivisione della sezione in 512×768 fibre. Chiaramente è impossibile adottare questa discretizzazione nella pratica in quanto ciò comporterebbe la memorizzazione, per ogni sezione del modello strutturale, di 4×10^5 coppie di coordinate e valori di tensioni, rigidezze e storia delle deformazioni.

Assumendo 512×768 fibre i valori delle tensioni risultanti e la matrice di rigidezza nel

punto A di figura 4.5 valgono

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ -M_y \\ M_x \end{array} \right\}_{A, Fm} = \left\{ \begin{array}{c} -2.912484379590260 \text{ E}+000 \\ 0.319829159415936 \text{ E}+000 \\ -1.104301271707114 \text{ E}-016 \end{array} \right\} \quad (4.109)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N_{,\epsilon} & N_{,gx} & N_{,gy} \\ -M_{y,\epsilon} & -M_{y,gx} & -M_{y,gy} \\ M_{x,\epsilon} & M_{x,gx} & M_{x,gy} \end{array} \right\}_{A, Fm} = \left\{ \begin{array}{c} 7.943437500000000 \text{ E}+002 \\ 25.054943847657100 \text{ E}+000 \\ 9.540979117872439 \text{ E}-017 \end{array} \right\} \quad (4.110)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 25.054943847657100 \text{ E}+000 & 9.107298248878237 \text{ E}-017 \\ -8.619587044714510 \text{ E}+000 & -9.740921245071817 \text{ E}-017 \\ -9.697553158172396 \text{ E}-017 & 23.830272097587301 \text{ E}+000 \end{array} \right\}$$

dove il suffisso Fm adesso ricorda il metodo a Fibre.

Il confronto tra i due approcci di integrazione può essere fatto definendo la seguente quantità

$$app(x) = \frac{|x_{Fm} - x_{FFa}|}{|x_{FFa}|} \quad (4.111)$$

mediante la quale si stima il grado di approssimazione nella valutazione delle quantità x associata con l'uso del metodo alle fibre rispetto all'approccio fibre-free. In particolare, le caratteristiche della sollecitazione risultanti e gli elementi della matrice di rigidezza valutate nel punto A sono:

$$\left\{ \begin{array}{c} app(N) = \\ app(M_y) \\ app(M_x) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} 4.08 \text{ E}-009 \\ 2.00 \text{ E}-006 \\ - \end{array} \right\} \quad (4.112)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ccc} app(N_{,\epsilon}) & app(N_{,gx}) & app(N_{,gy}) \\ app(M_{y,\epsilon}) & app(M_{y,gx}) & app(M_{y,gy}) \\ app(M_{x,\epsilon}) & app(M_{x,gx}) & app(M_{x,gy}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{ccc} 2.30 \text{ E}-004 & 5.53 \text{ E}-004 & - \\ 5.53 \text{ E}-004 & 1.26 \text{ E}-004 & - \\ - & - & 2.32 \text{ E}-004 \end{array} \right\} \quad (4.113)$$

Questi valori mostrano chiaramente la corretta implementazione dell'approccio fiber-free. D'altra parte è anche evidente che una discretizzazione della sezione in quasi 4×10^5 fibre non è sufficiente per ottenere risultati numericamente esatti, specialmente per la valutazione della matrice di rigidezza.

Per giustificare ulteriormente quanto detto si riportano nelle figure in scala bi-logaritmica 4.3 e 4.4 i valori di $app(x)$, per ogni valore non nullo del vettore della risultante delle forze o della matrice di rigidezza, in funzione del numero di fibre considerato. A tale scopo la sezione

è stata discretizzata in un numero crescente di fibre che vanno da 4×6 fibre, 8×12 e così via, fino a 512×768 .

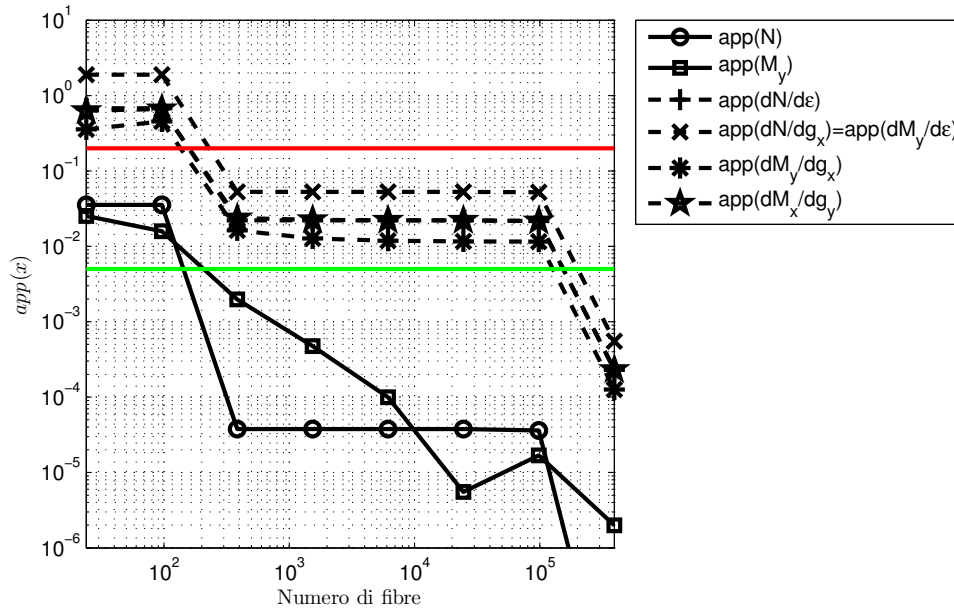


Figura 4.3: Legame costitutivo bilineare: confronto tra approccio Fiber-Free (FFa) e Metodo a Fibre (Fm). Punto A: Valore di $app(x) = |x_{Fm} - x_{FFa}|/|x_{FFa}|$ vs. numero di fibre

Da tali figure è evidente che l'approssimazione tende a zero quando il numero di fibre aumenta. Inoltre, le curve relative alle risultanti delle caratteristiche della sollecitazione, sono sempre più basse rispetto a quelle relative alla matrice di rigidezza; ciò mostra che il metodo a fibre è di gran lunga meno preciso e poco efficiente quando viene utilizzato per la valutazione della matrice tangente.

In particolare, per quanto riguarda la valutazione delle caratteristiche della sollecitazione, si deduce dalle figure 4.3 e 4.4 che sono richieste almeno 10^2 fibre per mantenere l'errore relativo al di sotto di 10^{-2} , valore che può essere considerato accettabile per le sezioni in cemento armato. Tuttavia, in questo caso, gli elementi della matrice di rigidezza sono grossolanamente imprecisi e persino l'ordine di grandezza può essere erroneamente stimato dal metodo a fibre in quanto possono essere raggiunti errori relativi maggiori di 10^0 .

Per dare al lettore un ordine di grandezza della approssimazione che può essere considerata accettabile, sono state incluse in figura, una linea rossa ed una verde, corrispondente rispettivamente a valori di $app(x)$ di 2×10^{-1} e 5×10^{-5} .

Pertanto, i valori di $app(x)$ sotto la linea verde possono essere considerati accettabili e l'intersezione delle curve con le linee orizzontali dà immediatamente il numero minimo di fibre necessarie per conseguire l'approssimazione richiesta. Al contrario, valori di $app(x)$, che sono

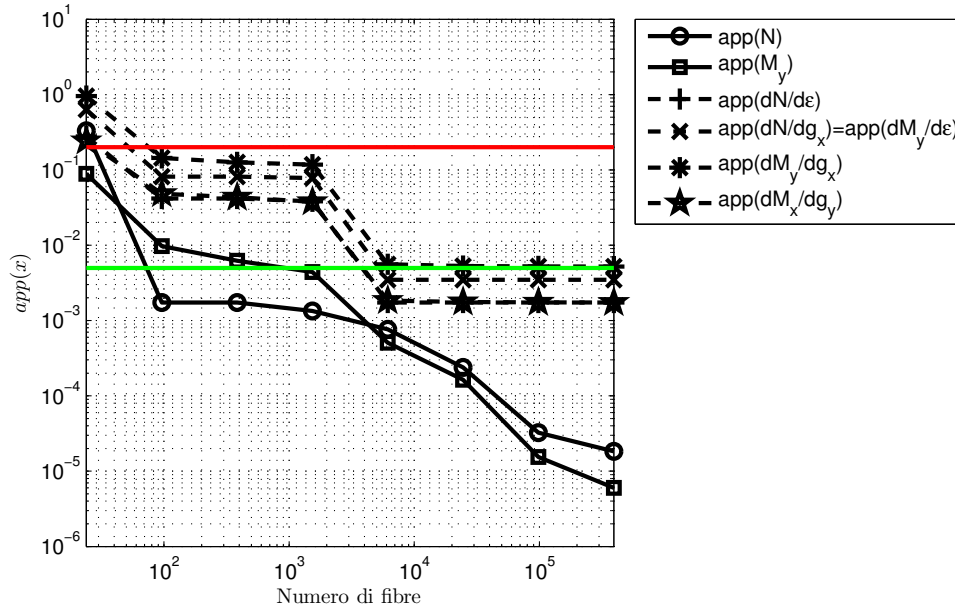


Figura 4.4: Legame costitutivo bilineare: confronto tra approccio Fiber-Free (FFa) e Metodo a Fibre (Fm). Punto A: Valore di $app(x) = |x_{Fm} - x_{FFa}|/|x_{FFa}|$ vs. numero di fibre

al di sopra della linea rossa sono considerati assolutamente inaccettabili, dal momento che l'errore ha lo stesso ordine di grandezza del valore di x . Purtroppo, questo è ciò che accade realmente nei software commerciali per l'analisi non lineare di strutture intelaiate in quanto l'ordine di grandezza delle fibre suggerite al progettista, principalmente a causa di requisiti di memoria, è variabile tra a 1 e 100.

Come mostrato nella [54], queste conclusioni non sono dovute alla scelta particolare dei punti B e A ma sono comuni a tutti i punti della curva $M_y - g_x$ in figura 4.5 e per tutte le componenti non nulle delle risultanti delle caratteristiche della sollecitazione e della matrice di rigidezza, come mostrato nelle figure 4.6 - 4.7.

Infine si noti che, in aggiunta alla valutazione esatta delle risultanti delle caratteristiche della sollecitazione e della matrice di rigidezza, l'approccio fiber-free è molto meno impegnativo computazionalmente rispetto al tradizionale metodo a fibre. Infatti, durante l'intera analisi $M_y - g_x$, sono state utilizzate solo 6 variabili, cioè le tre componenti del vettore di deformazione relative alla massimizzazione della deformazione su 2 sottodomini della sezione.

Chiaramente le considerazioni di cui sopra si riferiscono al specifico in esame; approssimazioni più elevate saranno presumibilmente ottenute per sezioni più complesse e condizioni di carico più articolate. Per mostrare le prestazioni del metodo proposto nel caso di un modello ad elementi finiti, si riporta un test numerico relativo all'analisi statica analisi della colonna a mensola riportata in figura 4.8(a).

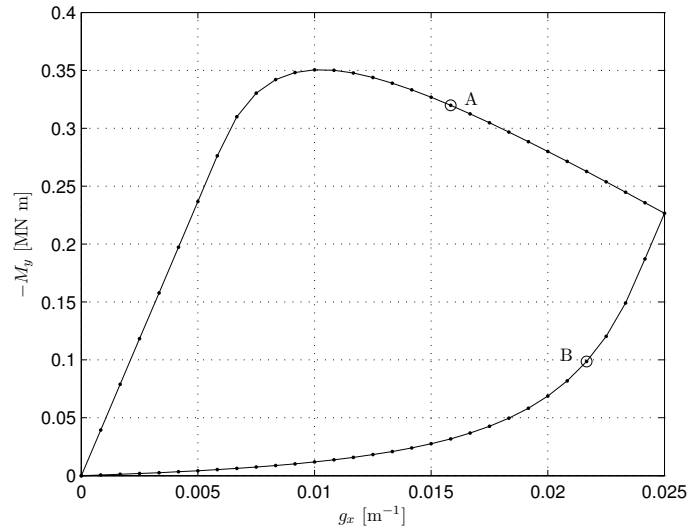


Figura 4.5: Legame costitutivo non lineare: relazione $M_y - g_x$

La colonna ha una lunghezza $L = 3\text{ m}$ e una sezione retta rettangolare con dimensioni $0.6\text{ m} \times 0.4\text{ m}$ dotata di una legge bilineare caratterizzato da $E_e = 5000\text{ MPa}$, $E_h = 0.1 \times E_e$ e $\varepsilon_y = -0.002$.

La colonna è stata modellata con cinque elementi trave, impiegando l'approccio fiber-free e l'approccio a fibre per calcolare la caratteristica della sollecitazione risultante e la matrice di rigidezza delle sezioni di controllo.

La colonna è sottoposta ad uno spostamento imposto alla estremità libera, applicato lungo la direzione dell'asse debole della sezione trasversale. Lo spostamento imposto varia ciclicamente tra -0.18 e 0.18 con passi di dimensione 0.009 . Inoltre, all'estremità libera è applicata anche una forza di compressione $F_z = -1\text{ MN}$ allo scopo di presollecitare la struttura e garantire la convergenza della procedura numerica, in quanto la resistenza a trazione è trascurata. La corrispondente curva carico-spostamento è riportata in figura 4.8(b).

Nella tabella 4.4 sono riportati i valori delle caratteristiche della sollecitazione R_x alla sommità della colonna, valutati con l'approccio fiber-free e quelli corrispondenti ottenuti con il metodo a fibre adottando una numero di fibre comprese tra 100 e 6400 . Nella stessa tabella viene anche riportato l'errore relativo, valutato mediante la formula 4.111, che mostra come la soluzione ottenuta con il metodo a fibre tende a quello ottenuto con l'approccio fiber-free, quando il numero di fibre impiegate aumenta.

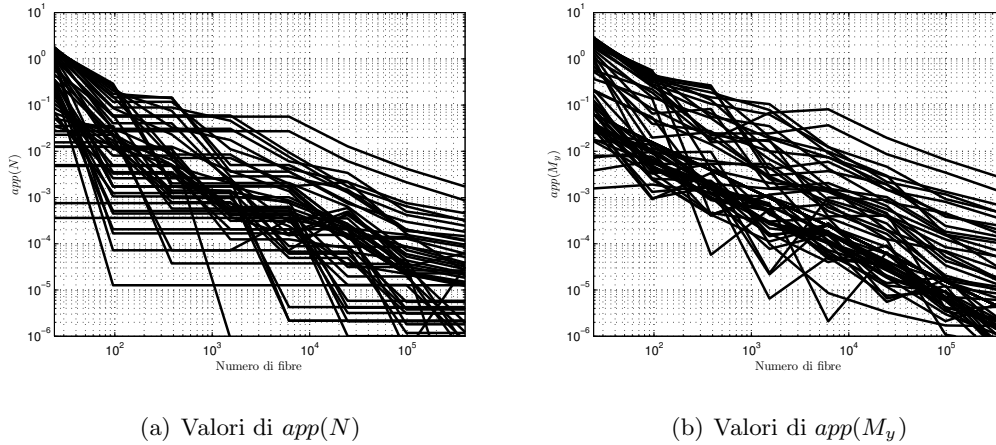


Figura 4.6: Confronto tra approccio Fiber-Free (FFa) e Metodo a Fibre (Fm) in termini di caratteristica della sollecitazione risultante. Valori di $app(x) = |x_{Fm} - x_{FFa}|/|x_{FFa}|$ vs numero di fibre per il punto nella figura 4.5.

4.6.4 Integrazione del legame costitutivo di Karsan-Jirsa

Al fine di dare conto del comportamento insoddisfacente del metodo a fibre si riportano i risultati di questo metodo quando è impiegato il legame costitutivo di Karsan-Jirsa [44].

Con riferimento alla fig. 11 in [56], che è riportato in fig. 4.9 per comodità, mostriamo la curva $M_x - g_y$ della sezione analoga alla predente ma dotata del legame costitutivo di Karsan-Jirsa; i dettagli del modello e dei valori dei parametri costitutivi assunti nell'esempio possono essere trovati in [56].

Per ogni punto della curva $M_x - g_y$ riportata nella figura 4.9, i valori di $app(x)$ relativi agli elementi della matrice di rigidezza sono riportate nei grafici di figura 4.11. In particolare, essi forniscono un'ulteriore prova delle seguenti caratteristiche del metodo fiber-free:

1. Il parametro $app(x)$ tende a zero quando il numero di fibre tende all'infinito, ciò significa che i risultati ottenuti con il metodo a fibre convergono a quelli ottenuti dall'approccio fiber-free, quando il numero di fibre aumenta.
2. Quando viene applicato alla valutazione delle caratteristiche della sollecitazione, il metodo a fibre mostra un tasso di convergenza maggiore di quello associato con la valutazione della matrice di rigidezza.
3. La differenza tra i risultati derivanti dal metodo a fibre e l'approccio fiber-free, relativi alla valutazione della matrice di rigidezza, può diventare maggiore di 1 quando per discretizzare la sezione si utilizza un numero di fibre inferiore a 10^3 ; tale differenza

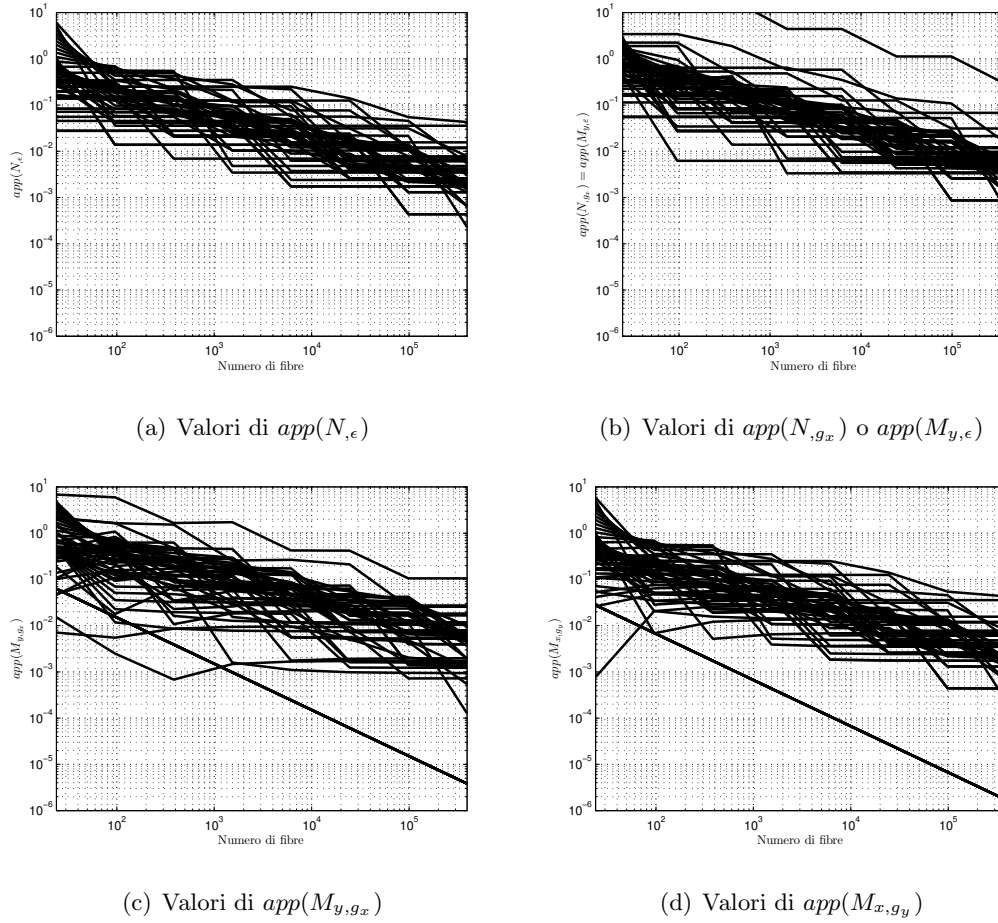
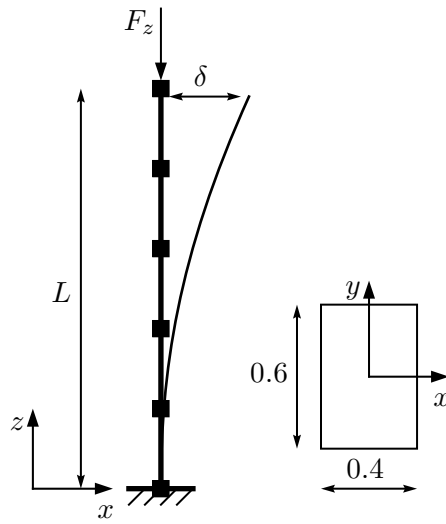
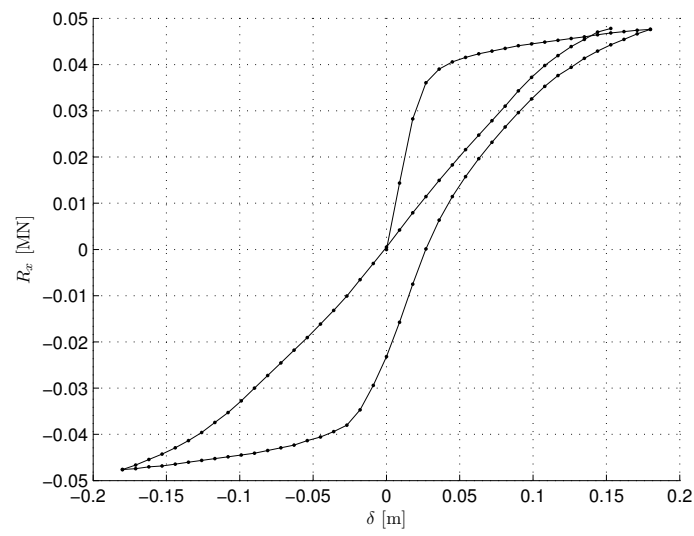


Figura 4.7: Ccnfronto tra approccio Fiber-Free (FFa) e Metodo a Fibre (Fm) in termini di rigidità. Valori di $app(x) = |x_{Fm} - x_{FFa}|/|x_{FFa}|$ vs numero di fibre per il punto nella figura 4.5.

inaspettatamente elevata significa che, in tali casi, i risultati del metodo fibre e quelli dell'approccio fiber-free hanno a malapena stesso ordine di grandezza.



(a) Colonna a mensola e spostamento basato sulla discretizzazione agli elementi finiti



(b) Curva carico-spostamento

Figura 4.8: Colonna a mensola con legge costitutiva di tipo bilineare

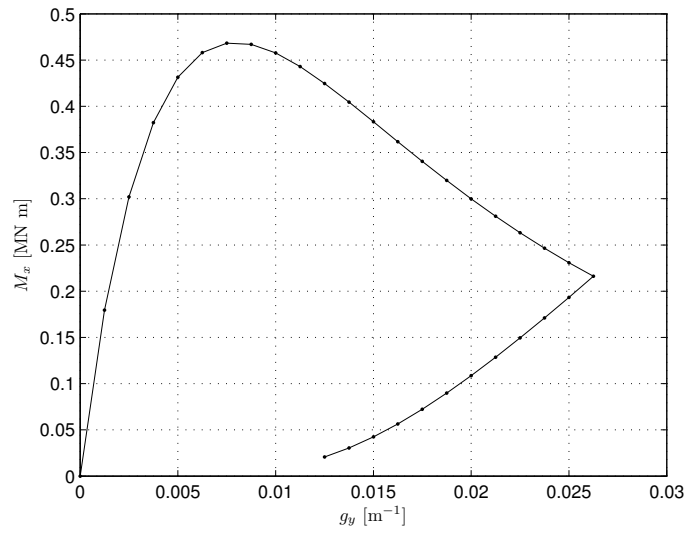
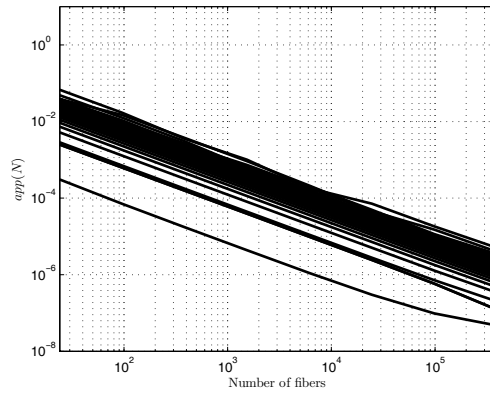
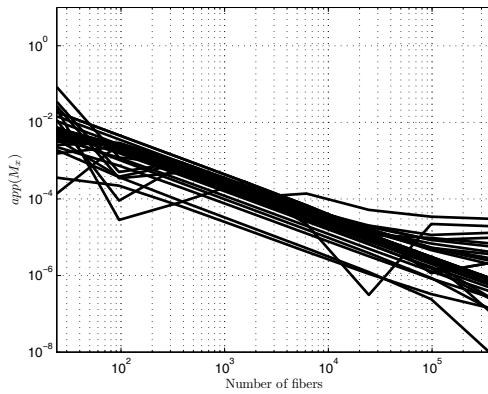


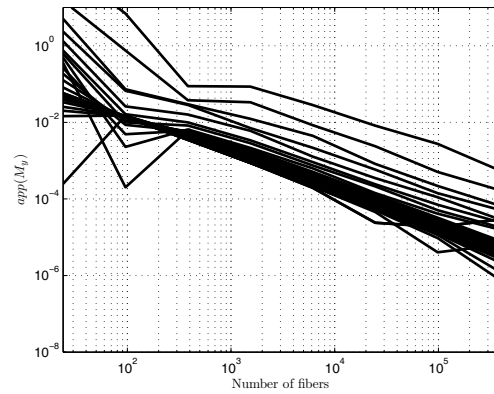
Figura 4.9: Legame costitutivo di Karsan-Jirsa: relazione $M_x - g_y$



(a) Valori di $app(N)$



(b) Valori di $app(M_x)$



(c) Valori di $app(M_y)$

Figura 4.10: Legame di Karsan e Jirsa: Confronto tra l'approccio Fiber-Free (FFa) e il Metodo a Fibre (Fm) in termini di caratteristica della sollecitazione risultante. Valori di $app(x) = |x_{Fm} - x_{FFa}|/|x_{FFa}|$ vs numero di fibre per il punto nella figura 4.9.

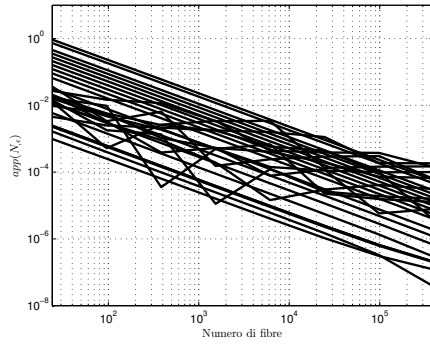
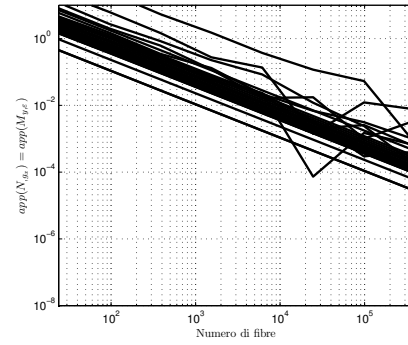
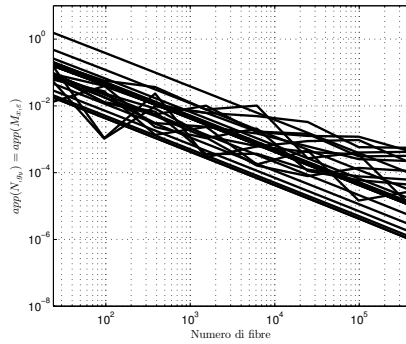
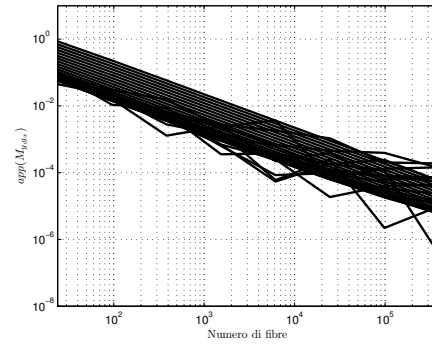
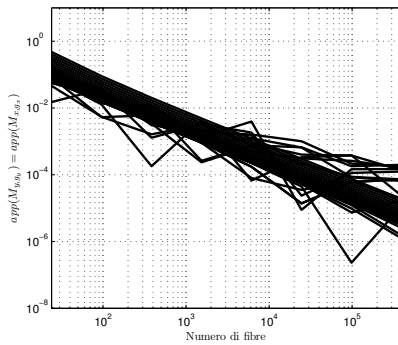
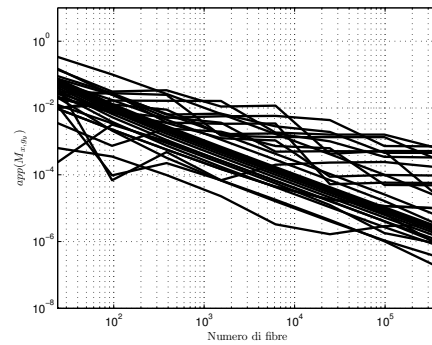
(a) Valori di $app(N, \epsilon)$ (b) Valori di $app(N, g_x)$ o $app(M_{y, \epsilon})$ (c) Valori di $app(N, g_y)$ o $app(M_{x, \epsilon})$ (d) Valori di $app(M_{y, g_x})$ (e) Valori di $app(M_{x, g_x})$ o $app(M_{y, g_y})$ (f) Valori di $app(M_{x, g_y})$

Figura 4.11: Legame di Karsan e Jirsa: Confronto tra l'approccio Fiber-Free (FFa) e il Metodo a Fibre (Fm) in termini di rigidezza. Valori di $app(x) = |x_{Fm} - x_{FFa}|/|x_{FFa}|$ vs numero di fibre per il punto nella figura 4.9.

Ω_ε	dominio poligonale
\mathbf{r}	vettore posizione
$\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}$	vettori posizione di inizio e fine dei vertici del lato i -esimo di Ω_ε
$\Delta \mathbf{r}_i$	$\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$
l_i	lunghezza del lato i -esimo di Ω_ε
\mathbf{n}_i	normale uscente al lato i -esimo di Ω_ε
$\varepsilon = \epsilon + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$	campo di deformazione corrente
$\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$	deformazioni in \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_{i+1}
$\Delta \varepsilon_i$	$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$
$\bar{\varepsilon}_i$	$(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})/2$
$\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}$	deformazione minima e massima in Ω_ε
$\Delta \varepsilon$	$\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$
f	legame costitutivo
$f^{(+k)}$	k -esima primitiva di f , cioè $f(\varepsilon) = \partial^k f^{(+k)}(\varepsilon)/\partial \varepsilon^k$; $f^{(0)} = f$.
$\mathbf{g}^{\otimes m}$	$\begin{cases} 1 & \text{if } m = 0 \\ \underbrace{(\mathbf{g} \otimes \dots \otimes \mathbf{g})}_{m \text{ times}} & \text{if } m > 0 \end{cases} \quad m \text{ intero non negativo}$
\mathbf{I}_m	$\int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{(\mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r})}_{m \text{ times}} d\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r}^{\otimes m} d\Omega \quad m \text{ intero non negativo}$
$R_{br_i}^{ar_{i+1}}$	$(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g})^b (\mathbf{r}_{i+1} \cdot \mathbf{g})^a \quad a \geq 0, b \geq 0$
C_j^m	$\frac{m!}{j!(m-j)!}$
α_i	$C_j^{(m-1)} R_{(m-j-1)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq 1 \quad 0 \leq j \leq m$
α_{i+1}	$C_{(j-1)}^{(m-1)} R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{(j-1)\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq 1 \quad 0 \leq j \leq m$
α_{ii}	$C_j^{(m-2)} R_{(m-j-2)\mathbf{r}_i}^{j\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq 1 \quad 0 \leq j \leq m$
$\alpha_{i(i+1)}$	$C_{(j-1)}^{(m-2)} R_{(m-j-1)\mathbf{r}_i}^{(j-1)\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq 1 \quad 0 \leq j \leq m$
$\alpha_{(i+1)(i+1)}$	$C_{(j-2)}^{(m-2)} R_{(m-j)\mathbf{r}_i}^{(j-2)\mathbf{r}_{i+1}} \quad m \geq 1 \quad 0 \leq j \leq m$
\mathbf{R}_{ii}	$\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i$
$\mathbf{R}_{i+1 i+1}$	$\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}$

Tabella 4.1: Sommario dei simboli usati nelle formule di integrazione

$$\begin{aligned}
A_f &= \begin{cases} \hat{A}_f & \text{if } |\Delta\varepsilon| \geq \text{tol}_{\mathbf{g}} \\ A_{f_4} & \text{if } |\Delta\varepsilon| < \text{tol}_{\mathbf{g}} \end{cases} \\
\hat{A}_f &= \sum_{i=1}^n l_i(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] \\
A_{f_4} &= \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(-j)}(\epsilon)}{j!} \mathbf{I}_j \cdot \mathbf{g}^{\otimes j} \\
\\
\mathbf{s}_f &= \begin{cases} \hat{\mathbf{s}}_f & \text{if } |\Delta\varepsilon| \geq \text{tol}_{\mathbf{g}} \\ \mathbf{s}_{f_4} & \text{if } |\Delta\varepsilon| < \text{tol}_{\mathbf{g}} \end{cases} \\
\hat{\mathbf{s}}_f &= \sum_{i=1}^n l_i(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \left[\hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] \mathbf{r}_i + \hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}] \Delta \mathbf{r}_i - \hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}] \hat{\mathbf{g}} \right] \\
\mathbf{s}_{f_4} &= \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(-j)}(\epsilon)}{j!} \mathbf{I}_{j+1} \mathbf{g}^{\otimes j} \\
\\
\mathbf{J}_f &= \begin{cases} \hat{\mathbf{J}}_f & \text{if } |\Delta\varepsilon| \geq \text{tol}_{\mathbf{g}} \\ \mathbf{J}_{f_4} & \text{if } |\Delta\varepsilon| < \text{tol}_{\mathbf{g}} \end{cases} \\
\hat{\mathbf{J}}_f &= \sum_{i=1}^n (l_i \mathbf{n}_i \cdot \hat{\mathbf{g}}) \mathbf{D}_i \\
\text{dove } \mathbf{D}_i &= \hat{\Phi}_i^0[f^{(+1)}] \mathbf{R}_{ii} + 2\hat{\Phi}_i^1[f^{(+1)}] \text{sym}[\mathbf{r}_i \otimes \Delta \mathbf{r}_i] + \hat{\Phi}_i^2[f^{(+1)}] (\Delta \mathbf{r}_i \otimes \Delta \mathbf{r}_i) + \\
&\quad - 2\hat{\Phi}_i^0[f^{(+2)}] \text{sym}[\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}] - 2\hat{\Phi}_i^1[f^{(+2)}] \text{sym}[\Delta \mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}}] + 2\hat{\Phi}_i^0[f^{(+3)}] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \\
\mathbf{J}_{f_4} &= \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(-j)}(\epsilon)}{j!} \mathbf{I}_{j+2} \mathbf{g}^{\otimes j}
\end{aligned}$$

Tabella 4.2: Formule di integrazione

$$\hat{\Phi}_i^j[f] = \begin{cases} \Phi_i^j[f] & \text{if } |\Delta\varepsilon_i| \geq tol_\varepsilon \\ \Phi_i^j[f_4] & \text{if } |\Delta\varepsilon_i| < tol_\varepsilon \end{cases}$$

$$\Phi_i^0[f] = \frac{[f^{(+1)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i}$$

$$\Phi_i^1[f] = \frac{f^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i} - \frac{[f^{(+2)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i^2}$$

$$\Phi_i^2[f] = \frac{f^{(+1)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i} - 2\frac{f^{(+2)}(\varepsilon_{i+1})}{\Delta\varepsilon_i^2} + 2\frac{[f^{(+3)}(\varepsilon)]_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}}{\Delta\varepsilon_i^3}$$

$$\Phi_i^0[f_4] = f(\bar{\varepsilon}_i) + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{24}\Delta\varepsilon_i^2$$

$$\Phi_i^1[f_4] = \frac{f(\bar{\varepsilon}_i)}{2} + \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}\Delta\varepsilon_i + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{48}\Delta\varepsilon_i^2 + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3$$

$$\Phi_i^2[f_4] = \frac{f(\bar{\varepsilon}_i)}{3} + \frac{f^{(-1)}(\bar{\varepsilon}_i)}{12}\Delta\varepsilon_i + \frac{f^{(-2)}(\bar{\varepsilon}_i)}{64}\Delta\varepsilon_i^2 + \frac{f^{(-3)}(\bar{\varepsilon}_i)}{384}\Delta\varepsilon_i^3$$

Tabella 4.3: Formule per la valutazione di $\hat{\Phi}_i^j[f]$, con $j = 0, 1, 2$

	R_x [MN]	$app(F_x)$
fiber-free	0.047690	-
100 fibers	0.047357	6.98E-03
400 fibers	0.047643	9.86E-04
1600 fibers	0.047703	2.73E-04
6400 fibers	0.047683	1.47E-04

Tabella 4.4: Valori di R_x nell'ultimo passo dell'analisi della colonna a mensola in figura 4.8

Capitolo 5

Metodi di integrazione numerica

5.1 Metodo di Newton-Raphson

L'obiettivo del metodo di Newton-Raphson [25] è quello di costruire la curva di equilibrio della struttura; sull'asse delle ordinate è riportato il moltiplicatore dei carichi λ mentre sull'asse delle ordinate lo spostamento di un punto della struttura. Si utilizza il λ , poichè in questo metodo di analisi strutturale non lineare, ogni step di carico corrisponde all'applicazione di un incremento di carico esterno alla struttura. Si determinano così i corrispondenti incrementi di spostamento. La curva di equilibrio che si vuole ottenere è quella tratteggiata nella figura(5.1) per un sistema a più gradi di libertà.

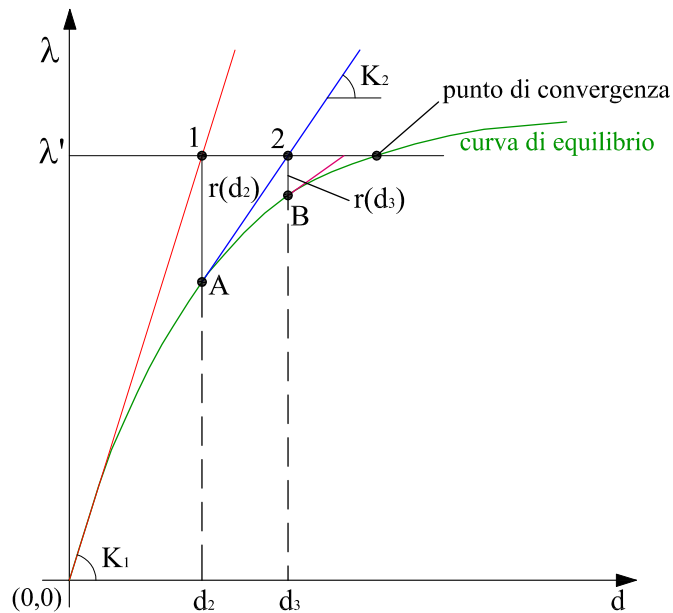


Figura 5.1: Metodo di Newton-Raphson per singolo incremento di carico

Della curva è noto solo il punto $(0,0)$ corrispondente alla configurazione iniziale indefor-

mata su cui non agiscono carichi. Perciò è nota la tangente \mathbf{K}_1 in $(0, 0)$ che corrisponde alla rigidezza elastica (iniziale), ovvero la rigidezza della struttura indeformata. Si ipotizza che la struttura, mantiene questa rigidezza. Così la curvatura di equilibrio coincide con la retta rossa tangente in $(0, 0)$. E' noto quindi lo stato della struttura nel punto $(0, 0)$. Dato un λ (singolo step di carico), dall'intersezione con la retta rossa nel punto 1 sono noti gli spostamenti \mathbf{d}_2 (essendo $\mathbf{d}_1 = 0$) che soddisfano l'equilibrio. Noto \mathbf{d}_2 si calcolano le corrispondenti deformazioni. Quindi si ottengono le tensioni e dall'integrazione di queste sulla sezione, si ricavano le sollecitazioni interne (o forze interne). In tal modo si ottiene anche lo squilibrio di queste forze rispetto a λ . Questo sbilanciamento è chiamato residuo delle forze $\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_2)}$ essendo $\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_1)} = 0$ ed è pari alla differenza tra le forze esterne e interne. Mentre le forze esterne sono imposte, quelle interne equilibrano la struttura internamente, ovvero sono funzioni di \mathbf{d} . Quindi in generale $\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_i)}$ si può scrivere come:

$$\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_i)} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}_{(\mathbf{d}_i)}^{int} \quad (5.1)$$

dove i rappresenta l'indice di iterazione a cui faremo ci riferiamo. Infatti il residuo calcolato rappresenta l'errore commesso perchè indica quanto la soluzione è lontana dalla curva di equilibrio reale. Perciò l'obiettivo delle iterazioni è proprio quella di annullare questo errore. Noto $\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_2)}$ dalla 5.1, la tangente al punto A ha pendenza \mathbf{K}_2 pari a:

$$\mathbf{K}_2 = \left| \frac{d\mathbf{F}}{d(\mathbf{d})} \right|_{\mathbf{d}_2} = \mathbf{r}'_{(\mathbf{d}_2)} = -\mathbf{F}'\mathbf{d}_2 \quad (5.2)$$

ovvero più in generale:

$$\mathbf{K}_i = -\mathbf{r}'_{(\mathbf{d}_i)} \quad (5.3)$$

Quindi $\mathbf{r}'_{(\mathbf{d})}$ rappresenta la matrice di rigidezza della struttura \mathbf{K}_i per un dato livello di spostamento \mathbf{d}_i .

Nota la tangente nel punto A, dalla (5.3), si è completata la seconda iterazione. Procedendo allo stesso modo, dall'intersezione della tangente in A (retta blu, nota dall'iterazione precedente) con lo stesso λ si ottiene il punto 2 a cui corrisponde lo spostamento \mathbf{d}_3 (di terza iterazione). Da quest'ultimo si ricava $\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_3)}$ ottenendo il punto B. Dalla (5.3) si ha la tangente nel punto B che serve per la successiva iterazione. E' completata così, la terza iterazione. Le iterazione si ripetono fino al raggiungimento della convergenza e cioè quando i valori di $\mathbf{r}_{(\mathbf{d}_i)}$ non risultano trascurabili rispetto ad una certa tolleranza. La verifica di convergenza, da fare ad ogni iterazione è la seguente:

$$\Delta \mathbf{f}_i \mathbf{d}_i \leq e10^{-16} \quad (5.4)$$

Infatti per spostamenti piccoli, un errore piccolo sugli spostamenti comporta un errore grande su $\Delta \mathbf{f}$ e viceversa, per spostamenti grandi (vedi figura). Se la (5.4) è soddisfatta, si ha la convergenza e si passa allo step di carico successivo, altrimenti occorre un'ulteriore iterazione nello stesso step di carico. Quindi per singolo step di carico k si effettuano un ciclo i di iterazioni. Con questo metodo occorre calcolare la matrice di rigidezza per ogni iterazione, i cui termini si riducono gradualmente al procedere delle iterazioni, per effetto del comportamento non lineare, a seconda del livello di deformazione raggiunto. Così ogni punto della curva corrisponde ad una iterazione. Analiticamente lo spostamento a cui effettuare l'iterazione successiva è quello tale che $\mathbf{r}_{(d)} \rightarrow \mathbf{0}$. Effettuando lo sviluppo in serie di Taylor su $\mathbf{r}_{(d)}$, fino ai termini del secondo ordine, si ottiene la seguente equazione lineare:

$$\mathbf{r}_{(d)} = \mathbf{r}_{(d_0)} + \mathbf{r}'_{(d_0)} (\mathbf{d} - \mathbf{d}_0) \quad (5.5)$$

Imponendo $\mathbf{r}_{(d)} = 0$ si ricava d come:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 - \frac{1}{\mathbf{r}'_{(d_0)}} \mathbf{r}_{(d_0)} \quad (5.6)$$

Iterativamente e ricordando la (5.3), la (5.6) diventa

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i - \mathbf{K}_{(\mathbf{d}_i)}^{-1} \mathbf{r}_{(\mathbf{d}_i)} \quad (5.7)$$

Il metodo di Newton-Raphson ricava, per ogni iterazione, il vettore delle forze interne \mathbf{f}_i (ordinate dei punti della curva) e la matrice di rigidezza \mathbf{K}_i (tangente ai punti della curva) della struttura, per il suo spostamento \mathbf{d}_i . Questi \mathbf{f}_i e \mathbf{K}_i sono ottenuti assemblando le quantità \mathbf{f}_i^e e \mathbf{K}_i^e del singolo elemento. Lo scopo del metodo è proprio calcolare il vettore forze \mathbf{f}_i^e e la matrice di rigidezza \mathbf{K}_i^e dell'elemento, a partire da un dato vettore spostamenti \mathbf{d}_i^e . Gli spostamenti dell'elemento \mathbf{d}_i^e sono estratti dagli spostamenti della struttura \mathbf{d}_i , forniti da Newton per la singola iterazione i . Ottenuti \mathbf{f}_i^e e \mathbf{K}_i^e per tutti gli elementi, dall'assemblaggio, si ricavano \mathbf{f}_i e \mathbf{K}_i dell'intera struttura nel riferimento globale, per il dato \mathbf{d}_i , della struttura. Procedendo in tal modo per ogni iterazione e step di carico, si ottengono i punti della curva di equilibrio.

5.1.1 Gli arc-length ed i relativi metodi

La necessità di arc-length

Le figure 5.2 (a) - (c) mostrano tre possibili curve carico-spostamento che coinvolgono punti limite con entrambe le “snap-through” figura 5.2(a) e “snap-back ” figura 5.2(b). La vera risposta nelle figure 5.2(a) e (b) comporterebbe sia effetti statici che dinamici. Sotto il controllo del carico la risposta dinamica in figura 5.2(a) seguirebbe la linea tratteggiata (eventualmente seguita da una piccola oscillazione smorzata intorno al punto C). Nel tracciare la curva di equilibrio dal punto A fino a C, l’algoritmo basato sul controllo di scarico risulta instabile, mentre è stabile l’algoritmo con controllo di spostamento. Quest’ultimo algoritmo, però è anch’esso instabile per casi come quello della figura 5.2(b). Ci sono diversi motivi che impongono di studiare i percorsi di stabilità, in particolare:

1. A può essere il massimo locale (figure 5.2(a) e (b)).
2. La “struttura” in fase di analisi può essere solo una componente; si può desiderare incorporare la risposta carico-spostamento di questa componente all’interno dell’analisi di una struttura completa.
3. Nelle situazioni di cui sopra ed altri, può essere importante sapere non solo il carico di collasso, ma se questo è il collasso di una forma “duttile” (Figura 5.2(d)) o “fragile” (Figura 5.2(c)) .
4. Anche se A è il solo massimo, può essere necessario spostarsi al punto B (appena oltre il massimo) per diversi motivi:
 - per confermare che si è oltrepassato realmente un punto limite. Molti analisti, applicano semplicemente incrementi di carico finché la procedura di risoluzione non converge (cioè applicando l’incremento di livello Y in Figura 5.2(c)) e quindi supporre che questo insuccesso iterativo riflette un cedimento strutturale. Purtroppo, l’errore iterativo può verificarsi per altre ragioni e questo approccio non è raccomandato. Anche per stabilire il plateau in Figura 5.2(d), il controllo di carico non è appropriato.
 - Avendo convergenza su un punto come B, è quindi possibile studiare lo stato strutturale (sollecitazioni, deformazioni e zone plastiche, ecc) in B, al fine di ottenere informazioni sul meccanismo o causa del cedimento strutturale.

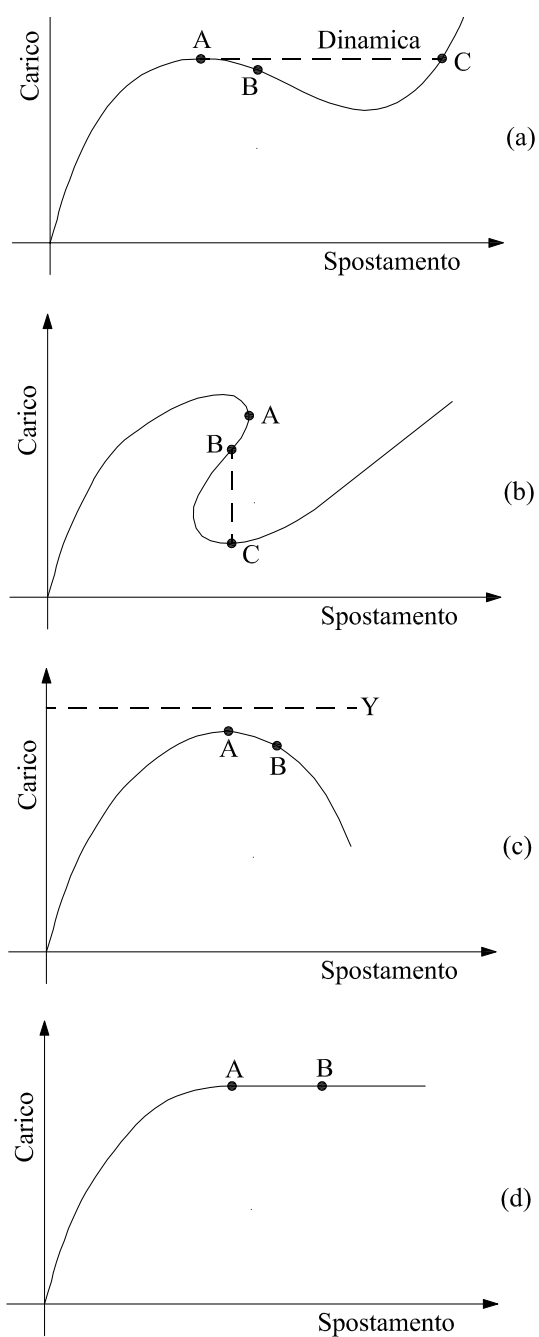


Figura 5.2: Varie curve carico-spostamento: (a) snap-through; (b) snap-back; (c) collasso rigido; (d) collasso plastico

5. La figura 5.2(d) illustra il tipo di risposta carico-spostamento, derivante da un'analisi geometricamente lineare di un materiale elastico-perfettamente plastico. Con il controllo di carico standard, sarebbe molto difficile da riprodurre questo “carico limite” e senza convergere su un punto come B, sarebbe impossibile stabilire pienamente il “meccanismo” (Figura 5.2(d)).

Varie forme di controllo dello spostamento generalizzato

Come punto di partenza per vari metodi di continuazione siamo in grado di scrivere le equazioni di equilibrio come:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}, \lambda) = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{q}_{ef} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

dove \mathbf{q}_i sono le forze interne funzioni degli spostamenti \mathbf{p} ; il vettore \mathbf{q}_{ef} è un carico esterno fisso e lo scalare λ è un parametro che amplifica il livello di carico \mathbf{q}_{ef} . L'equazione (5.8) definisce uno stato di carico proporzionale in cui è conservato il modello di carico fisso. Si introduce un metodo semplice per cui lo scalare λ , può essere incrementato automaticamente producendo così un metodo di continuazione di carico controllato. Tuttavia, come già discusso, la principale limitazione del controllo di carico è che vicino a un punto limite, può non esserci intersezione tra il percorso di equilibrio (5.8) e il piano $\lambda = \text{costante}$ che rappresenta il successivo livello di carico. Varie forme dei metodi arc-length provengono dal lavoro originale di Riks [94], [93] e Wempner [121] che mira a trovare l'intersezione dove s è la lunghezza dell'arco, definita da:

$$s = \int ds \quad (5.9)$$

e

$$ds = \sqrt{d\mathbf{p}^T d\mathbf{p} + \delta \lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef}} \quad (5.10)$$

Il parametro di scala ψ è richiesto in (5.10) perché il contributo del carico dipende dalla scala adottata tra i termini di carico e di spostamento. Dopo aver introdotto l'arc-length s , si può tentare di risolvere direttamente:

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}(s)) - \lambda(s) \mathbf{q}_{ef} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

utilizzando un metodo di ordine superiore. Tuttavia, con questo approccio è spesso molto difficile limitare con successo lo “squilibrio” e quindi solitamente sono usati i metodi predittore-correttore. Per il controllo del carico, questi riguardano anche le tecniche con

un backup predittore incrementale e tangenziale, seguito da iterazioni Newton-Raphson o Newton-Raphson modificati che fungono da correttori. Per metodi di arc-length, si potrebbe sostituire efficacemente la forma differenziale (5.10) con una forma incrementale:

$$\mathbf{a} = (\Delta \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{p} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef}) - \Delta l^2 = 0 \quad (5.12)$$

dove Δl è il fissato “raggio” di intersezione desiderato (vedi figura 5.3 dove per brevità abbiamo scritto \mathbf{q}_{ef} come \mathbf{q}) che è un’approssimazione dell’incremento della lunghezza dell’arco. Il vettore $\Delta \mathbf{p}$ e lo scalare Δl sono incrementali (non iterativi, per i quali si useranno $\delta \mathbf{s}$) e si riferiscono all’ultimo stato di equilibrio convergente (vedi figura 5.3).

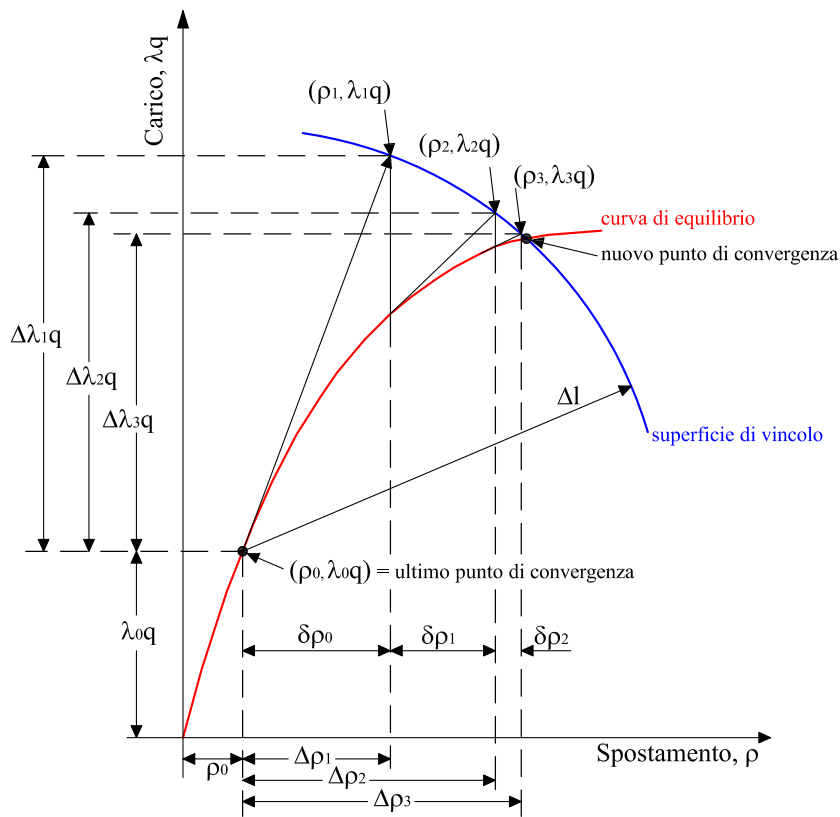


Figura 5.3: Procedura dell’Arc-Length e notazione per un sistema ad un grado di libertà: $\psi = 1$

L’essenza principale dei metodi di arc-length è che il parametro di carico λ , diventa una variabile. Quindi, insieme con le n variabili di spostamento, abbiamo un totale di $n+1$ variabili. Per risolvere per questi, abbiamo le n equazioni di equilibrio di (5.8) e il vincolo di una equazione (5.11). A seguito di Riks [94], [93] e Wempner [121], possiamo risolvere per questi $n + 1$ variabili direttamente applicando il metodo di Newton-Raphson a (5.8) e (5.11). Da sviluppi precedenti, il metodo di Newton-Raphson risulta introdotto al meglio attraverso

una serie di Taylor troncata dove pedice n indica il valore corrente. Allora sviluppando la (5.8) e la (5.12) si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n &= \mathbf{g}_0 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \mathbf{g}_0 + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{p} - \mathbf{q}_{ef} \delta l = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_n &= \mathbf{a}_0 + 2\Delta \mathbf{p}^T \delta \mathbf{p} + 2\Delta \lambda \delta \lambda \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.13)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \mathbf{q}_i(\mathbf{p}_0) - \lambda_0 \mathbf{q}_{ef} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_0 &= \mathbf{p}_0^T \mathbf{p}_0 + \lambda_0^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef} - \Delta l^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

con \mathbf{p}_0 e λ_0 valori di risposta e di amplificazione alla prima iterazione.

I valori $\delta \mathbf{p}$ e $\delta \lambda$ si ricavano dalle equazioni (5.13a) e (5.13b), ponendo uguale a zero \mathbf{g}_n , e \mathbf{a}_n :

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{q}_{ef} \\ 2\Delta \mathbf{p}^T & 2\Delta \lambda \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{a}_0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Lo Jacobiano o “matrice di rigidezza” all’interno delle parentesi quadre in (5.15), rimane non singolare, anche quando $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}}$ è singolare. (Le equazioni della forma (5.15) sono conosciute anche come equazioni di confine [95]).

Le equazioni (5.15) possono essere utilizzate direttamente per trovare e modificare $\delta \mathbf{p}$ e $\delta \lambda$. Tuttavia, a differenza di \mathbf{K}_t , la matrice di rigidezza eccedente in (5.15) è non simmetrica e non diagonale.

Il metodo dell’Arc-Length sferico

Invece di risolvere la (5.8), si può introdurre direttamente il vincolo della (5.13) seguendo Batoz e Dhett per il controllo dello spostamento di un singolo punto; a tal fine lo spostamento iterativo $\delta \mathbf{p}$, è suddiviso in due parti. Quindi il Metodo di Newton cambia al nuovo livello di carico incognito, $\lambda_n = \lambda_0 + \delta \lambda$, diventando:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p} &= -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{p}_0, \lambda) = -\mathbf{K}_t^{-1} (\mathbf{q}_i(\mathbf{p}_0) - \lambda_n \mathbf{q}_{ef}) \\ &= -\mathbf{K}_t^{-1} (\mathbf{g}(\mathbf{p}_0, \lambda_0) - \delta \lambda \mathbf{q}_{ef}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si può lavorare con una delle forme sul lato più a destra della (5.16). La penultima forma rappresenta una divisione completa delle forze interne \mathbf{q}_i e delle forze esterne $\lambda \mathbf{q}_{ef}$, mentre l'addendo finale può essere espresso come:

$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_0 + \delta \lambda \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{q}_{ef} = \delta \bar{\mathbf{p}} + \delta \lambda \delta \mathbf{p}_t \quad (5.17)$$

con $\delta \mathbf{p}_t = \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{q}_{ef}$. Usando questa forma, $\delta \bar{\mathbf{p}}$ è l'iterativo cambiamento che deriverebbe dal controllo di carico standard di Newton-Raphson, per un fissato livello di carico λ_0 , mentre $\delta \mathbf{p}_t$ è il vettore spostamento corrispondente al livello di carico fissato \mathbf{q}_{ef} . Se viene adottato il metodo di Newton-Raphson modificato, $\delta \mathbf{p}_t$ deve essere computato con il predittore iniziale, il quale non cambia durante le iterazioni (essendo fissata \mathbf{K}_t). Avendo ottenuto $\delta \mathbf{p}$ dalla (5.16) con $\delta \lambda$ ancora sconosciuto, i nuovi spostamenti incrementali sono:

$$\Delta \mathbf{p}_n = \Delta \mathbf{p}_0 + \delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}_0 + \delta \bar{\mathbf{p}} + \delta \lambda \delta \mathbf{p}_t \quad (5.18)$$

dove $\delta \lambda$ è sempre incognita. Riformulando la (5.12), è possibile calcolare:

$$(\Delta \mathbf{p}_0^T \Delta \mathbf{p}_0 + \Delta \lambda_0^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef}) = (\Delta \mathbf{p}_n^T \Delta \mathbf{p}_n + \Delta \lambda_n^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef}) = \Delta l^2 \quad (5.19)$$

Sostituendo dalla (5.18) per $\Delta \mathbf{p}$ nella (5.19) conduce all'equazione quadratica scalare:

$$\mathbf{a}_1 \delta \lambda^2 + \mathbf{a}_2 \delta \lambda + \mathbf{a}_3 = 0 \quad (5.20)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \delta \mathbf{p}_t^T \delta \mathbf{p}_t + \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \delta \mathbf{p}_{ef} \\ \mathbf{a}_2 &= 2 \delta \mathbf{p}_t (\Delta \mathbf{p}_0 + \delta \bar{\mathbf{p}} + 2 \Delta \lambda_0 \psi^2 \mathbf{q}_{ef} \mathbf{q}_{ef} \\ \mathbf{a}_3 &= (\Delta \mathbf{p}_0 + \delta \bar{\mathbf{p}})^T (\Delta \mathbf{p}_0 + \delta \bar{\mathbf{p}}) - \Delta l^2 + \Delta \lambda_0 \psi^2 \mathbf{q}_{ef} \mathbf{q}_{ef} \end{aligned} \quad (5.21)$$

che può essere risolto per $\delta \lambda$ affinché il cambiamento (5.17) sia completamente definito. In contrasto con l'uso di (5.15), questa tecnica richiede solo l'inversione della matrice di rigidezza tangente simmetrica e diagonale \mathbf{K}_t . In teoria il metodo soffre la limitazione che proprio nel punto limite \mathbf{K}_t diventa singolare e l'equazione non può essere risolta. Tuttavia, un certo numero di autori hanno affrontato la questione della 'stabilizzazione' della matrice di rigidezza vicino a punti limite.

Non abbiamo ancora discusso il "parametro di scala" ψ che compare nella equazione (5.12) e nella (5.19). Sia Crisfield che Ramm hanno indipendentemente concluso che per i problemi pratici che coinvolgono un numero realistico di variabili, i termini di carico (quelli che coinvolgono ψ) hanno poco effetto e quindi, si pone ψ uguale a zero. Come risultato, il

vincolo dovrebbe essere considerato come “cilindrico” anziché “sferico”. Padovan, Arechaga [72] e Park [75] hanno proposto di adottare una variabile ψ , che assume valori grandi nelle fasi iniziali (in modo che la tecnica tenda poi verso il controllo di carico) e valori piccoli quando si avvicina al punto limite. Per descrivere il progresso del metodo dell’arc-length si fa riferimento alla figura (5.3) (dove per brevità si è scritto \mathbf{q} in luogo di \mathbf{q}_{ef}). Convergenza sul punto limite $(\mathbf{p}_0, \lambda_0 \mathbf{q}_{ef})$ verrebbe calcolato un incrementale predittore tangenziale $(\Delta \mathbf{p}_1, \Delta \lambda_1)$. La prima iterazione potrebbe quindi utilizzare la (5.20) e la (6.2) con il vecchio $\Delta \mathbf{p}_0$ come $\Delta \mathbf{p}_1$ ed il vecchio $\Delta \lambda_0$ come $\Delta \lambda_1$ per ottenere $\delta \mathbf{p}_1$, e $\delta \lambda_1$, dopo di che la procedura di aggiornamento (vedi 5.18), porterebbe a

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \Delta \mathbf{p}_1 + \delta \mathbf{p}_1, \quad \Delta \lambda_2 = \Delta \lambda_1 + \delta \lambda_1 \quad (5.22)$$

Una volta aggiunta agli spostamenti \mathbf{p}_0 ed il livello di carico λ_0 , alla fine del precedente incremento questo processo porterebbe al punto $(\mathbf{p}_2, \lambda_2 \mathbf{q}_{ef})$. L’iterazione successiva sarebbe poi ri-applicare la (5.20) e la (6.2) con il vecchio $\Delta \mathbf{p}_0$ come $\Delta \mathbf{p}_2$ ed il vecchio $\Delta \lambda_0$ come $\Delta \lambda_2$ per ottenere $\delta \mathbf{p}_2$, e $\delta \lambda_2$ dopo di che la procedura di aggiornamento comporterebbe $\Delta \mathbf{p}_3 = \Delta \mathbf{p}_2 + \delta \mathbf{p}_2$, $\Delta \lambda_3 = \Delta \lambda_2 + \delta \lambda_2$. Le iterazioni cesseranno una volta che il criterio di convergenza è stato soddisfatto.

Carico non proporzionale

Fino a questo punto la procedura di risoluzione è basata sulla relazione di equilibrio (5.8) che implica un singolo vettore carico (o spostamento), \mathbf{q}_{ef} , il quale è scalato proporzionalmente tramite λ . Per molti problemi strutturali pratici, questo regime di carico è troppo restrittivo. Per esempio, può capitare di dover applicare separatamente il carico permanente o il peso proprio e poi aumentare monotonicamente il carico accidentale. In altri casi, può essere richiesta tutta una serie di fasi di carico. Fortunatamente, sono molti i regimi di carico, che possono essere applicati mediante diverse serie di sequenze di carico che coinvolgono due vettori di carico, uno che sarà scalato (il \mathbf{q}_{ef} precedente) e uno che verrà fissato ($\bar{\mathbf{q}}_{ef}$). Il carico esterno può essere rappresentato dalla

$$\mathbf{q}_e = \bar{\mathbf{q}}_{ef} + \lambda \mathbf{q}_{ef} \quad (5.23)$$

in modo che il vettore di forza in uscita diventi:

$$\mathbf{g} = \mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{q}}_{ef} - \lambda \mathbf{q}_{ef} \quad (5.24)$$

Un'equazione come (5.17) diventa:

$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g} = -\mathbf{K}_t^{-1} (\mathbf{q}_i(\mathbf{p}_0) - \bar{\mathbf{q}}_{ef} - \lambda \mathbf{q}_{ef}) \quad (5.25)$$

oppure

$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1} (\mathbf{q}_i(\mathbf{p}_0) - \bar{\mathbf{q}}_{ef} - \lambda_0 \mathbf{q}_{ef}) - \delta \lambda \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{q}_{ef} = \delta \bar{\mathbf{p}} + \delta \lambda \mathbf{p}_t \quad (5.26)$$

Con queste nuove definizioni, può essere mantenuta la struttura di base dell'algoritmo precedente.

5.1.2 Criteri di convergenza

Un primo criterio di convergenza può essere:

$$\sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{S} \mathbf{g}} < \beta \sqrt{\mathbf{q}_e^T \mathbf{S} \mathbf{q}_e} \quad (5.27)$$

dove \mathbf{g} è il vettore di squilibrio del carico e \mathbf{S} è una matrice di scala che potrebbe, ad esempio, essere utilizzata per garantire che, in un problema di variabili di rotazione, tutti i parametri abbiano le stesse dimensioni. Crisfield ha usato $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$, dove \mathbf{C} è la matrice diagonale contenente gli elementi della diagonale principale della matrice di rigidezza tangente all'inizio dell'incremento. In aggiunta a criteri di convergenza, basati sulle forze, possono essere adottati criteri basati sugli spostamenti in modo che, per esempio, si potrebbe avere:

$$\|\delta \mathbf{p}\| < \beta \|\mathbf{p}\| \quad (5.28)$$

dove $\delta \mathbf{p}$ sono modifiche ripetute dello spostamento e \mathbf{p} gli spostamenti totali. Come mostrato in [23], la norma del cambiamento dello spostamento iterativo può essere molto piccola, mentre la norma della forza di squilibrio è molto grande. Quindi non è saggio adottare un criterio come il (5.28) basato, soltanto sullo spostamento, senza completarlo con un criterio basato sulle forze. Un'attraente alternativa ai criteri di convergenza basati sulle forze o sugli spostamenti è quella di utilizzare un criterio basato sul modulo dell'energia nella forma:

$$\|\delta \mathbf{p}^T \mathbf{g}\| < \beta \|\mathbf{p}^T \mathbf{q}_e\| \quad (5.29)$$

Ci sono vari modi in cui un simile criterio potrebbe essere introdotto ma lo stesso Crisfield ritiene che dovrebbero essere usati con grande cautela. Ad esempio, supponiamo che, abbiamo avuto:

$$\|\delta \mathbf{p}^T \mathbf{g}_0\| = |-\delta \mathbf{p}^T \mathbf{K}_t^{-1} \delta \mathbf{p}| < \beta \|\mathbf{p}^T \mathbf{q}_e\| \quad (5.30)$$

dove la variazione iterativa è $\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_0$. L'equazione (5.30) si limita a una certa misura della rigidezza di \mathbf{K}_t . Chiaramente quando il punto limite si avvicina, questo può essere

piccolo e tuttavia la procedura risolutiva può non essere affatto convergente. (Con un pieno Newton-Raphson, lontano dall'equilibrio, \mathbf{K}_t può non avere affatto significato strutturale). In alternativa, si potrebbe avere:

$$\|\delta \mathbf{p}^T \mathbf{g}_n\| = |\delta \mathbf{p}^T \mathbf{g}(\mathbf{p}_0 + \eta \delta \mathbf{p})| < \beta \|\mathbf{p}^T \mathbf{q}_e\| \quad (5.31)$$

I criteri di $\delta \mathbf{p}^T \mathbf{g}_n$ pari a zero è solo il criterio per una ricerca di linea esatta. Ciò può essere ottenuto anche per caso con uno step di lunghezza $\eta = 1$ implicando semplicemente che nella direzione iterativa corrente $\delta \mathbf{p}$, è stata raggiunta una posizione stazionaria di energia. Questo può, e spesso si verifica quando la soluzione è ancora molto lontana dall'equilibrio.

Capitolo 6

Deformata di una struttura in ambito non lineare

Negli elementi finiti con formulazione alle forze, vengono interpolate le caratteristiche della sollecitazione; in ambito lineare è facile ottenere le deformazioni, in ambito non lineare, invece, non è possibile conoscerle direttamente. Tuttavia nelle sezioni di controllo, tramite il legame costitutivo, è nota la curvatura $\chi(x)$, che è la derivata seconda dello spostamento $v(x)$:

$$\chi(x) = \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$

quindi lo spostamento è la primitiva del secondo ordine della curvatura. Da queste considerazioni quello che si è fatto, è stato interpolare la curvatura nelle varie sezioni di controllo con la spline, successivamente è stata integrata due volte ottenendo lo spostamento, lungo tutto l'elemento.

6.1 Spline cubica di Hermite

La curvatura in questo elemento viene interpolata con la Spline cubica di Hermite.

Una spline è una funzione, costituita da un insieme di polinomi raccordati tra loro, il cui scopo è interpolare in un intervallo un insieme di punti (detti nodi della spline), in modo da essere continua (almeno fino ad un dato ordine di derivate) in ogni punto dell'intervallo.

La Spline cubica di Hermite (chiamata anche cspline), in onore del matematico Charles Hermite, è una funzione spline di 3° dove ogni polinomio della spline è nella forma di Hermite. La forma di Hermite prevede che per ogni polinomio, in ciascun estremo, siano definite le coordinate del punto e la tangente alla curva. Individuati su un'asse i punti \mathbf{x}_k per $k = 1, \dots, n$, l'interpolazione è effettuata su ciascun intervallo $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$. Tale sottointervallo è normalizzato all'intervallo $(0, 1)$ tramite la funzione $\mathbf{t} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)/(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)$.

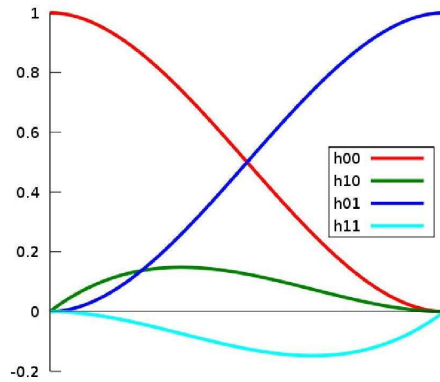


Figura 6.1: Le 4 funzioni base di Hermite. L'interpolazione in ciascun intervallo è una combinazione lineare di queste 4 funzioni.

6.1.1 Interpolazione di un singolo intervallo (0,1)

Con l'intervallo $(0, 1)$, dato il punto iniziale p_0 con $t = 0$ ed il punto finale p_1 con $t = 1$ con la tangente iniziale m_0 con $t = 0$ e tangente finale m_1 con $t = 1$, il polinomio è definito da:

$$\mathbf{p}(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{p}_0 + (t^3 - 2t^2 + t)\mathbf{m}_0 + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{p}_1 - (t^3 - t^2)\mathbf{m}_1 \quad (6.1)$$

con $t \in [0, 1]$

Le 4 funzioni di Hermite sono definite come segue:

$$\begin{aligned}
h_{00}(t) &= (2t^3 - 3t^2 + 1) \\
h_{10}(t) &= (t^3 - 2t^2 + t) \\
h_{01}(t) &= (-2t^3 + 3t^2) \\
h_{11}(t) &= (t^3 - t^2)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

allora il polinomio diventa:

$$\mathbf{p}(t) = h_{00}(t)\mathbf{p}_0 + h_{10}(t)\mathbf{m}_0 + h_{01}(t)\mathbf{p}_1 - h_{11}(t)\mathbf{m}_1 \tag{6.3}$$

6.1.2 Interpolazione su $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$

L'interpolazione di \mathbf{x} nell'intervallo $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ viene ora effettuata con la formula:

$$\mathbf{p}(x) = h_{00}(t)\mathbf{p}_k + h_{10}(t)\mathbf{m}_k + h_{01}(t)\mathbf{p}_{k+1} - h_{11}(t)\mathbf{m}_{k+1} \tag{6.4}$$

dove: $t = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$

6.1.3 Interpolazione di un set di dati

Un set di dati $(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k)$ con $k = 1, \dots, n$ viene interpolato applicando la procedura sopra esposta su ogni sottointervallo, dove le tangenti sono scelte in modo opportuno. Le tangenti per gli intervalli che condividono gli stessi punti finali sono uguali.

La scelta delle tangente non è univoca e ci sono diversi metodi che si possono applicare.

Differenze finite

La scelta più semplice è data dalla differenza su 3 punti e non richiede una lunghezza di intervallo costante,

$$\mathbf{m}_k = \frac{\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k}{2(\mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k)} + \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}}{2(\mathbf{t}_k - \mathbf{t}_{k-1})} \tag{6.5}$$

Cardinal spline

Una cardinal spline si ottiene se il valore della tangente è calcolato come:

$$\mathbf{m}_k = (1 - c) \frac{\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1}}{(\mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_{k-1})} \tag{6.6}$$

Il parametro c detto tensione è nell'intervallo $(0,1)$, rappresenta la “lunghezza” della tangente; $c = 1$ comporta tangenti lunghe pari a zero, e $c = 0$ porta al caso delle spline di tipo Catmull-Rom.

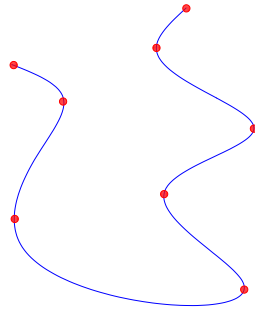


Figura 6.2: Esempio di tangente alle differenze finite

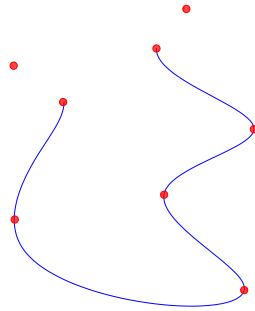


Figura 6.3: Esempio di spline Cardinal

6.1.4 Calcolo spostamento

Lo spostamento trasversale in un generico intervallo è valutato come primitiva del secondo ordine della curvatura. Per garantire la continuità dello spostamento, è necessario calcolare due costanti: una nel primo integrale che fisicamente è il valore della rotazione in un estremo dell'intervallo e un'altra costante per la primitiva della rotazione che fisicamente rappresenta un valore dello spostamento. Ciò che avviene con l'introduzione delle costanti, da un punto di vista fisico è riportato in figura(6.4)

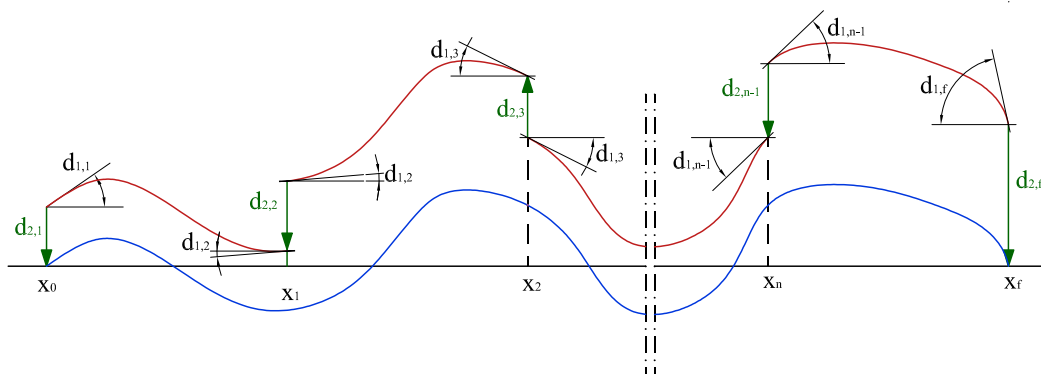


Figura 6.4: Continuità dello spostamento

Come si può vedere dalla figura(6.4), negli intervalli interni le costanti sono comuni a due intervalli contigui, quindi mediante un processo a “cascata” le costanti vengono calcolate a

partire dalle costanti degli estremi. Nell'elemento strutturale le quantità negli estremi sono spostamenti, quindi è necessario esprimere tutte le costanti in termini di spostamento. Per raggiungere questo obiettivo è stata realizzata una procedura che a partire dagli spostamenti negli estremi dell'elemento, calcola le costanti necessarie a garantire la continuità, tra gli intervalli, individuati da due sezioni di controllo successive. Facendo riferimento all'elemento in figura(6.5), costituito da n punti x_k e $n - 1$ intervalli.

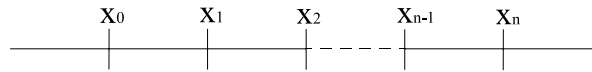


Figura 6.5: sottointervallo

Nel generico intervallo k di lunghezza l_k : detta x_k l'ascissa appartenente all'intervallo $\left[-\frac{l_k}{2}, +\frac{l_k}{2}\right]$, la spline ha equazione:

$$\mathbf{p}_k(x_k) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{h}_k(x_k) \mathbf{p}_k(x_k) \quad (6.7)$$

la primitiva:

$$\mathbf{F}_k(x_k) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{h}_k^{(1)}(x_k) \mathbf{p}_k(x_k) + \mathbf{d}_{1,k} = \mathbf{f}_k(x_k) + \mathbf{d}_{1,k} \quad (6.8)$$

e la primitiva del secondo ordine vale:

$$\mathbf{G}_k(x_k) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{h}_k^{(2)}(x_k) \mathbf{p}_k(x_k) + \mathbf{d}_{1,k} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_{2,k} = \mathbf{g}_k(x_k) + \mathbf{d}_{1,k} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_{2,k} \quad (6.9)$$

Detti $D0$ e Df rispettivamente lo spostamento nel nodo iniziale e nel nodo finale, le condizioni da rispettare sono:

$$\text{per } k = 1 \Rightarrow D0 = \mathbf{g}_1(x_0) + \mathbf{d}_{1,1} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_{2,1} \quad (6.10)$$

$$\text{per } k = n \Rightarrow \mathbf{g}_{n-1}(x_f) + \mathbf{d}_{1,n-1} \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_{2,n-1} = Df \quad (6.11)$$

nel generico intervallo interno occorre imporre condizioni sia alla \mathbf{g} che alla \mathbf{f} :

$$\text{per } k = k \Rightarrow \mathbf{g}_{k-1}\left(\frac{l_{k-1}}{2}\right) + \mathbf{d}_{1,k-1} \cdot \frac{l_k}{2} + \mathbf{d}_{2,k-1} = \mathbf{g}_k\left(\frac{l_k}{2}\right) + \mathbf{d}_{1,k} \cdot \frac{l_k}{2} + \mathbf{d}_{2,k} \quad (6.12)$$

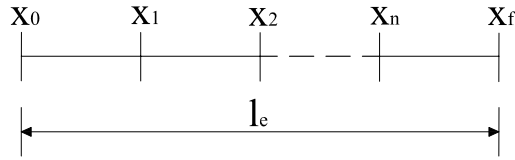


Figura 6.6: Suddivisione elemento finito

$$\text{per } k = k \Rightarrow \mathbf{f}_{k-1} \left(\frac{l_{k-1}}{2} \right) + \mathbf{d}_{1,k-1} = \mathbf{f}_k \left(\frac{l_k}{2} \right) + \mathbf{d}_{1,k} \quad (6.13)$$

portando i termini noti a secondo membro e le incognite al primo:

$$\text{per } k = 1 \Rightarrow \mathbf{d}_{1,1} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_{2,1} = \mathbf{D}\mathbf{0} - \mathbf{g}_1(x_0) \quad (6.14)$$

$$\text{per } k = n \Rightarrow \mathbf{d}_{1,n-1} \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_{2,n-1} = \mathbf{D}\mathbf{f} - \mathbf{g}_{n-1}(x_n) \quad (6.15)$$

$$\text{per } k = k \Rightarrow \mathbf{d}_{1,k-1} \cdot \frac{l_{k-1}}{2} + \mathbf{d}_{2,k-1} - \mathbf{d}_{1,k} \cdot \frac{l_k}{2} - \mathbf{d}_{2,k} = \mathbf{g}_k \left(\frac{l_k}{2} \right) - \mathbf{g}_{k-1} \left(\frac{l_{k-1}}{2} \right) \quad (6.16)$$

$$\text{per } k = k \Rightarrow \mathbf{d}_{1,k-1} + \mathbf{d}_{2,k-1} - \mathbf{d}_{1,k} - \mathbf{d}_{2,k} = \mathbf{f}_k \left(\frac{l_k}{2} \right) - \mathbf{f}_{k-1} \left(\frac{l_{k-1}}{2} \right) \quad (6.17)$$

Prima di proseguire è necessaria una precisazione: la spline interpola un insieme di punti qualsiasi, ma che devono essere noti anche negli estremi dell'intervallo. Nell'elemento computato, sono noti i valori in corrispondenza delle sezioni di controllo; poichè si utilizza la quadratura di Gauss, tali sezioni sono interne all'elemento, allora occorre prolungare la spline negli estremi dell'elemento; per questo motivo si pone:

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{l_e}{2} - \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1}{2} \quad \mathbf{x}_f = \frac{l_e}{2} - \frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}}{2} \quad (6.18)$$

La matrice associata al sistema è:

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \frac{l_{k-1}}{2} & 1 & \frac{l_k}{2} & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 & -1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & x_f & 1 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

mentre il vettore delle incognite e dei termini noti sono:

$$d = \begin{bmatrix} d_{1,1} \\ d_{2,1} \\ . \\ . \\ d_{1,k-1} \\ d_{2,k-1} \\ d_{1,k} \\ d_{2,k} \\ . \\ . \\ d_{1,n-1} \\ d_{2,n-1} \end{bmatrix} \quad \widehat{gf} = \begin{bmatrix} D\mathbf{1} - g_1(x_0) \\ . \\ . \\ g_k\left(\frac{l_k}{2}\right) - g_{k-1}\left(\frac{l_{k-1}}{2}\right) \\ f_k\left(\frac{l_k}{2}\right) - f_{k-1}\left(\frac{l_{k-1}}{2}\right) \\ . \\ . \\ D\mathbf{f} - g_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

È importante ricordare che le costanti sono due per ogni punto in cui è suddiviso l'intervallo più una per ciascun estremo; allora il totale delle incognite è: $2(k-1) + 2 = k$, cioè il numero di incognite è pari a quello degli intervalli in cui è suddiviso l'elemento. Il sistema da risolvere è:

$$d = M^{-1} \widehat{gf} \quad (6.21)$$

Calcolata la matrice d contenente le costanti $d_{i,k}$, si calcolano le (6.9), le (6.8) e quindi lo spostamento lungo l'elemento $v(x)$.

Capitolo 7

Esempi di applicazione dell'elemento sviluppato

Per mettere alla prova l'elemento oggetto di questa tesi, sono stati considerati diversi elementi strutturali, per i quali sono noti i comportamenti sperimentali e/o teorici. Per l'elemento sono state realizzate delle analisi statiche non lineari e confrontate sia con i dati sperimentali sia con quelli teorici.

7.1 Modello con formulazione mista di Taylor

Come primo test per l'elemento proposto, sono stati considerati i risultati ottenuti da Taylor [110], nella validazione del suo modello con formulazione mista, nel quale sono state considerate contemporaneamente, sia funzioni di interpolazione delle caratteristiche delle sollecitazioni, sia funzioni di interpolazione degli spostamenti, indipendenti le une dalle altre. Analogamente a quanto fatto da Taylor [110], è stata considerata una trave in acciaio appoggiata e appoggiata con un carico applicato nella sezione di mezzeria, come riportato in figura(7.1).

La luce della trave è $1800mm$, la sezione trasversale è quadrata con lato di $100mm$. Il comportamento dell'acciaio è assunto elasto plastico con incrudimento: modulo elastico $E = 29000MPa$, tensione di snervamento $\sigma = 50MPa$, modulo di incrudimento $H_{iso} = 2900MPa$.

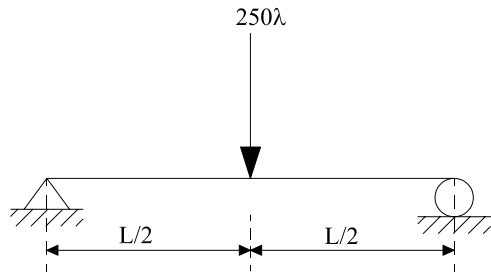


Figura 7.1: Trave appoggiata-appoggiata con carico concentrato in mezzeria

Nel modello proposto, la trave è stata modellata come singolo elemento, e sono considerati diciannove sezioni di controllo con quadratura di Gauss, cosicchè il punto di applicazione della forza, coincida con una sezione di controllo, in modo da ottenere la massima precisione possibile; per quanto riguarda la curvatura essa è stata interpolata con la spline, considerando 51 punti per ciascun intervallo. Taylor ha modellato l'intera trave con due elementi (un elemento per ogni tratto di simmetria); e ha impiegato 5 sezioni di controllo con quadratura sia di Gauss che di Lobatto lungo l'asse della trave per conoscere la curvatura dell'elemento. Nella sezione trasversale, sono stati considerati 10 sezioni di controllo con quadratura di Gauss e di Lobatto, per consentire la modellazione della diffusione della zona plastica. Tuttavia non è stata considerata la deformazione da taglio.

Le proprietà per l'analisi sono le seguenti: il carico centrale di $250kN$, è stato amplificato con un moltiplicatore λ incrementato in quindici step, per un incremento complessivo del 30%.

Per il confronto sono state considerate anche le soluzioni, fornite da un modello con approccio allo spostamento, con funzioni di forma cubiche date dai polinomi di Hermite. La figura(7.2) mette a confronto le curve carico applicato-spostamento in mezzeria, ottenute dal

modello proposto (rosso) e dal modello di Taylor (nero). Per quanto riguarda il campo lineare, vi è una perfetta coincidenza tra i due approcci, cosa che dimostra la corretta modellazione della struttura.

I risultati coincidono fino alla formazione della cerniera plastica, dopo di che vi è una divergenza nel comportamento, con l'elemento proposto che presenta una maggiore deformabilità e quindi più cautelativa.

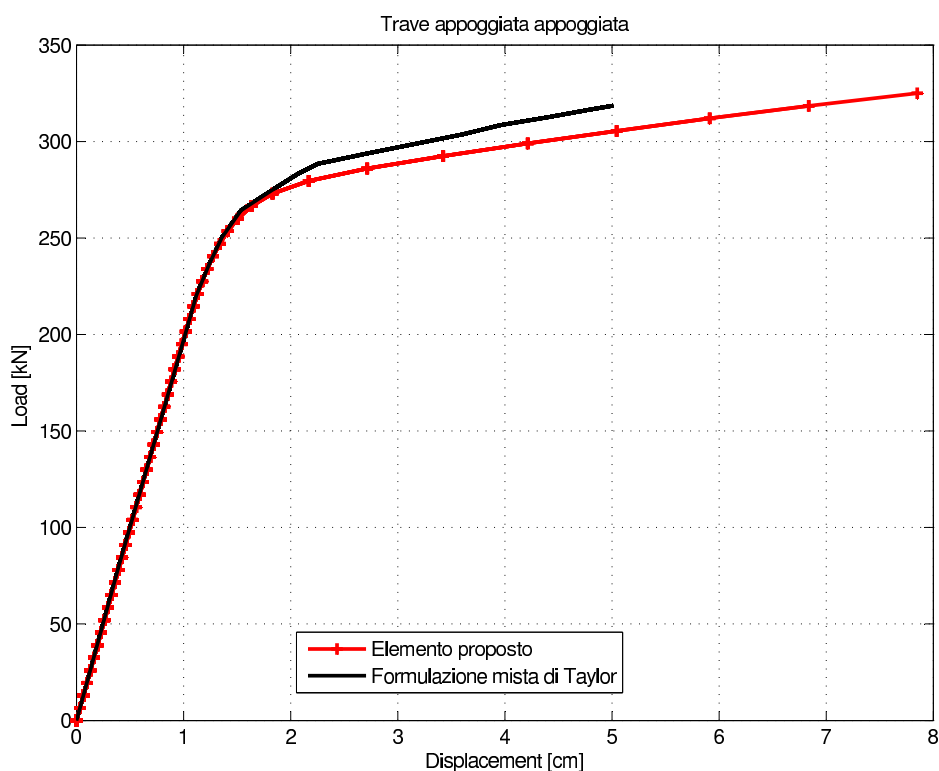


Figura 7.2: Confronto del modello proposto con quello di Taylor

7.2 Trave di Cervenka

Altro test per l'elemento proposto, è il confronto con i risultati sperimentali, ottenuti dalla prova su una trave pannello W-2 in cemento armato, testata da Cervenka e Gerstle [49]. La trave è composta da due pannelli rinforzati ortogonalmente separate da tre costole; le dimensioni sono: 762mm di larghezza $\times 762\text{mm}$ di altezza $\times 76,2\text{mm}$ di spessore. La figura(7.3) mostra i dettagli della geometria e le armature del pannello. Le proprietà dei materiali costituenti il pannello di analisi sono, per il calcestruzzo: $f'_c = 26,8\text{MPa}$, $E_c = 2 \times 10^4\text{MPa}$, $f'_t = 0,33(f'_c)^{1/2}\text{MPa}$. Le proprietà dell'acciaio di armatura sono: $E_s = 1,9 \times 10^5\text{MPa}$, $f_y = 353\text{MPa}$.

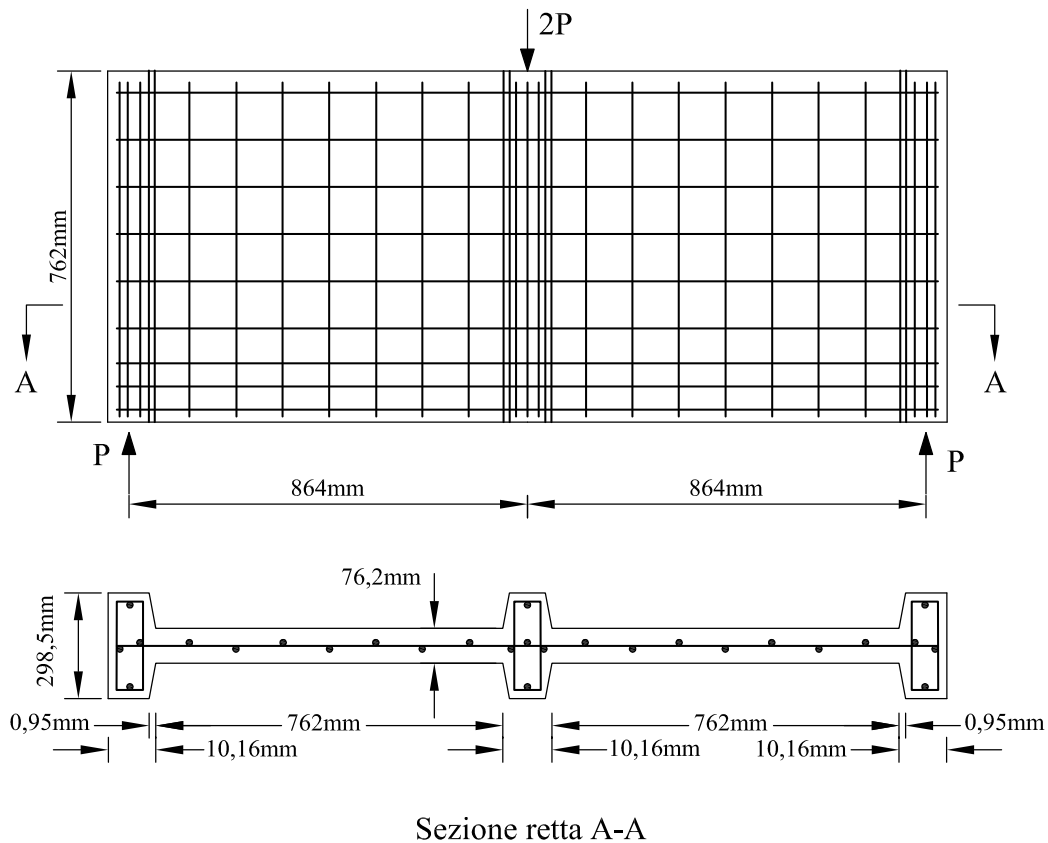


Figura 7.3: Dettagli della geometria e dell'armatura del pannello W-2

In virtù della simmetria in geometria e del carico, nel modello è stato considerato solo la metà del provino. La discretizzazione agli elementi finiti e la posizione delle armature impiegate sono mostrate nella (7.4). La risposta analitica della trave viene confrontata con le misure sperimentali di Cervenka [49] e la soluzione analitica ottenuta dall'analisi agli elementi finiti tradizionale. La capacità di carico del pannello è influenzata dal cedimento del rinforzo in acciaio in seguito alla trazione, prima della fessurazione del calcestruzzo, come riportato in figura(7.5).

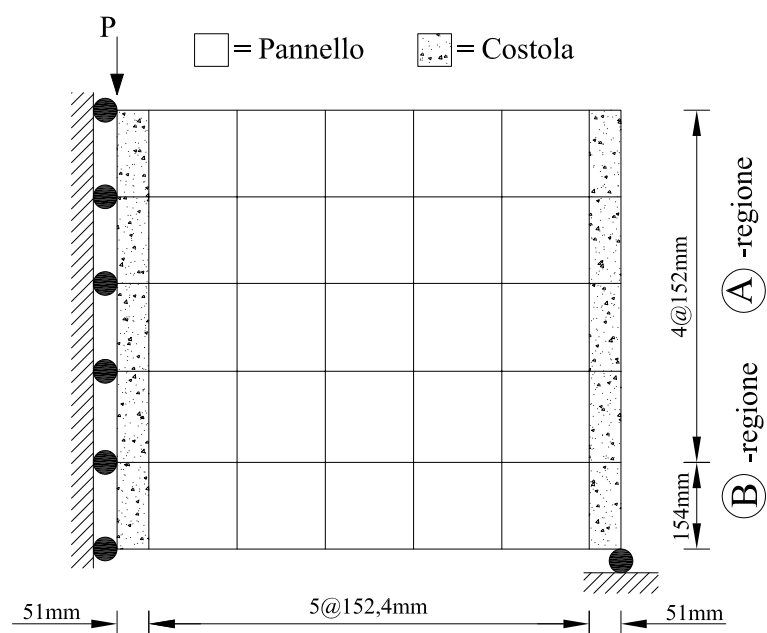


Figura 7.4: Suddivisione agli elementi finiti del pannello W-2

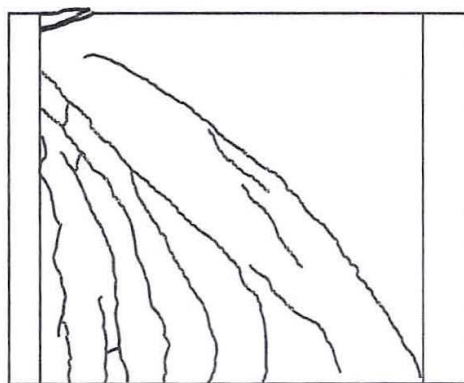


Figura 7.5: Trave W-2: quadro-fessurativo

Per la particolare forma della trave, è stata eseguita una diversa modellazione; di conseguenza è possibile valutare l'influenza del modello di analisi considerato. I modelli considerati sono tre:

1. modello con sezione costante e lunghezza della trave pari al solo tratto deformabile (cioè senza costolature)
2. modello con sezione costante, due travi con carico applicato nel nodo e lunghezza complessiva pari alla media tra la parte deformabile e gli elementi irrigidenti
3. modello con geometria reale

In tutti i modelli, il carico è stato applicato secondo una storia di carico, suddivisa in quindici incrementi fino al raggiungimento del carico max di $116,5kN$; sono inoltre considerati diciannove sezioni di controllo con quadratura di Gauss. In un primo modello la trave è modellata come continua e con sezione costante, cioè sono state trascurate le costole, di conseguenza la luce è di $1554mm$.

La curve sono riportate nella figura(7.6)

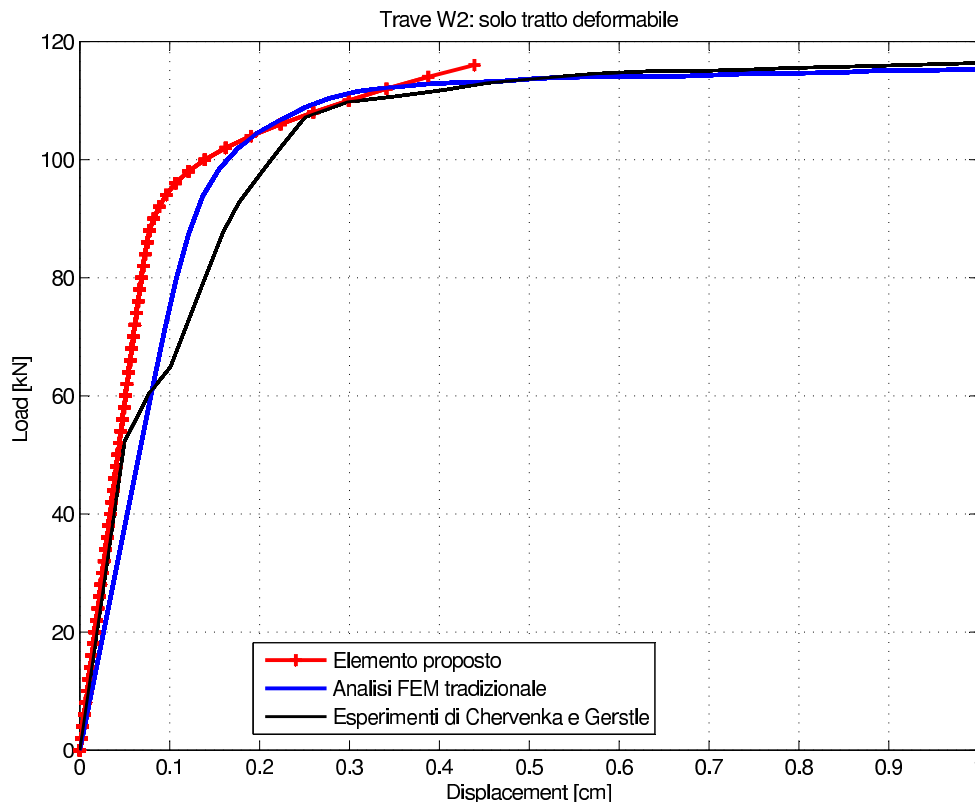


Figura 7.6: Trave W-2 solo tratto deformabile

In questo modello l'elemento proposto presenta una rigidità iniziale maggiore, dovuta alla luce minore della trave. La trave intorno ai $50kN$ presenta un'improvvisa riduzione

della rigidizza, che viene recuperata in parte, al crescere del carico. Questo comportamento sperimentale è da attribuire a diversi fenomeni, come ad esempio, la non conservazione delle sezioni piane, lo scorrimento tra barre di armatura e calcestruzzo, etc; tutti questi fenomeni non sono contemplati dal modello proposto, nè dall'analisi tradizionale agli elementi finiti.

Altro modello dell'elemento è stato quello di considerare una luce media, tra la lunghezza della sola parte deformabile e quella totale; il risultato delle analisi è riportato in figura(7.7).

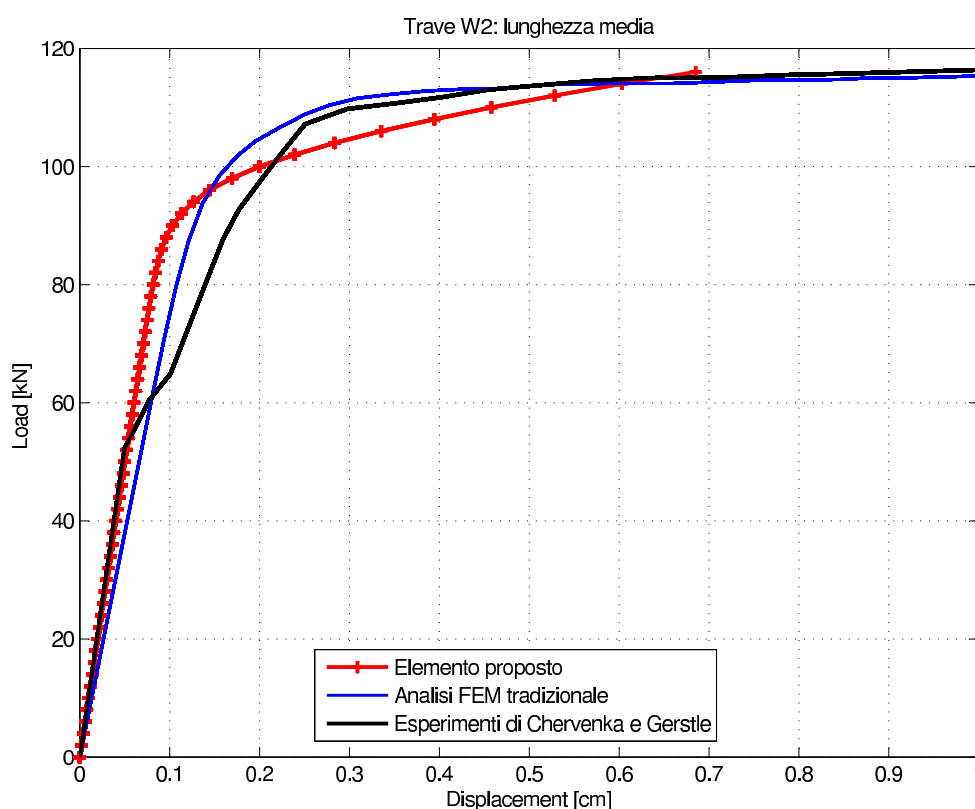


Figura 7.7: Trave W-2: lunghezza media

In questo modello, si ha una riduzione della rigidezza rispetto al modello precedente, ed è legata all'aumento della luce; tuttavia la rigidezza coincide con quella sperimentale, iniziale. Per quanto riguarda la tensione di snervamento, il modello presenta valore più basso, sia di quello sperimentale, sia di quello FEM, dimostrando così, di essere a vantaggio di sicurezza. Per quanto riguarda il campo non lineare, il modello presenta una rigidezza più alta dovuta al legame costitutivo adottato.

Un ultimo modello è stato quello della reale geometria della trave, cioè sono stati considerati i ringrossi e la reale luce: il risultato è mostrato in figura(7.8).

In questo modello la rigidezza iniziale è leggermente più alta di quella mostrata sperimentalmente; questa è dovuta alla presenza delle sezioni con spessore maggiore, le quali fungono da elementi irrigidenti. Questi elementi hanno un effetto benefico, anche per quanto riguar-

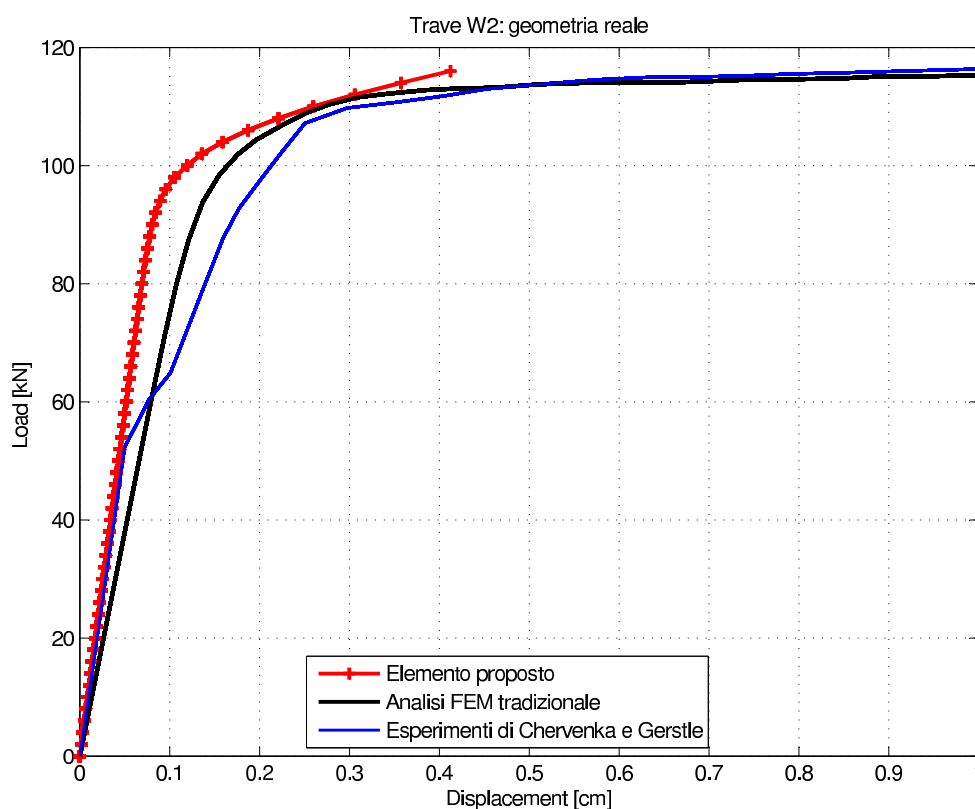


Figura 7.8: Trave W-2: geometria reale

da la resistenza, infatti risulta essere più alta rispetto ai modelli precedenti, come mostrato anche in figura(7.9)

Dal confronto dei tre modelli, si vede che quello con solo tratto deformabile, risulta essere il meno cautelativo, mentre la sezione reale, risulta essere più rigida e con resistenza più alta. Il campo non lineare, invece viene descritto in maniera analoga, dalla tre metodologie.

Nel modello FEM con shell, sono necessari circa 100nodi per metà pannello, quindi il modello deve gestire circa $100 \times 6 = 600g.l.$ Nei modelli con geometria approssimata c'è un solo elemeto, quindi due nodi, e cioè $2 \times 6 = 12g.l..$ Nel modello con geometria reale, si utilizzano cinque elementi, quindi sei nodi e cioè $6 \times 6 = 36g.l.$ In tutti i casi vi è una notevole riduzione dei gradi di libertà che il software deve gestire.

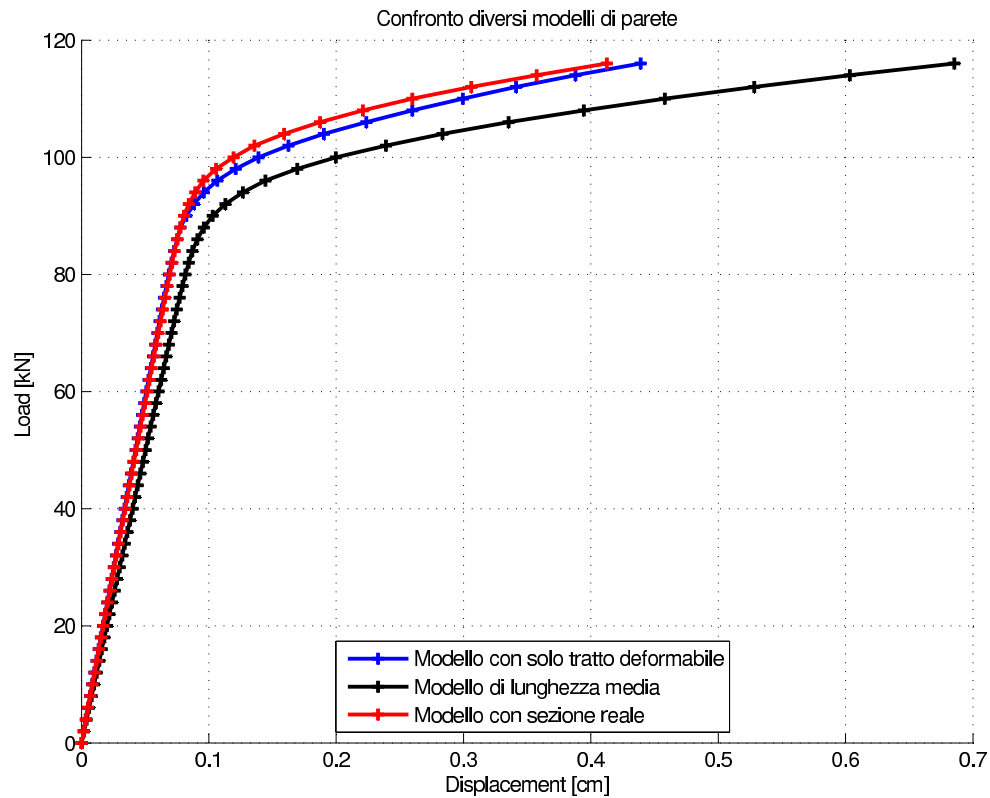


Figura 7.9: Trave W-2: confronto diversi modelli della parete

7.3 Modello di Vecchio e Balopoulou

Altro test per l'elemento proposto è il caso di un telaio, sottoposto ad una prova di carico verticale da Vecchio e Balopoulou([115])

Il telaio è costituito da due piani come mostrato in figura(7.10). I pilastri hanno un interasse di 3500mm , l'interpiano è 2000mm con un'altezza complessiva di 4600mm . Sia le travi che i pilastri hanno la medesima sezione: larghezza 300mm e profondità 400mm . Il telaio è stato costruito con un singolo getto, con la base di maggiori dimensioni per aumentarne il peso. Le estremità della trave a primo piano ed i pilastri sono stati rinforzati con quattro barre $\phi 20$ nella zona tesa, quattro barre $\phi 20$ nella zona compressa e staffe $\phi 10$ ogni 125mm . Nella zona centrale della trave a primo piano, le armature al lembo compresso sono state cambiate, riducendole a due $\phi 20$. La trave a secondo piano è stata rinforzata simmetricamente con tre barre $\phi 20$ sia nella zona tesa che nella zona compressa, con staffe $\phi 10$ ogni 250mm . In tutte le sezioni il copriferro è di 30mm ; i dettagli sono riportati in figura(7.10). L'armatura longitudinale è stata ancorata alle estremità, mediante saldatura a piastre di appoggio rigide.

Il telaio è stata formato e gettato in una posizione orizzontale, usando calcestruzzo con l'aggiunta di fluidificanti. Dopo la stagionatura per 25 giorni, le cassaformi sono state eliminate e il telaio è stato disposto in posizione verticale. La base del telaio è stata quindi

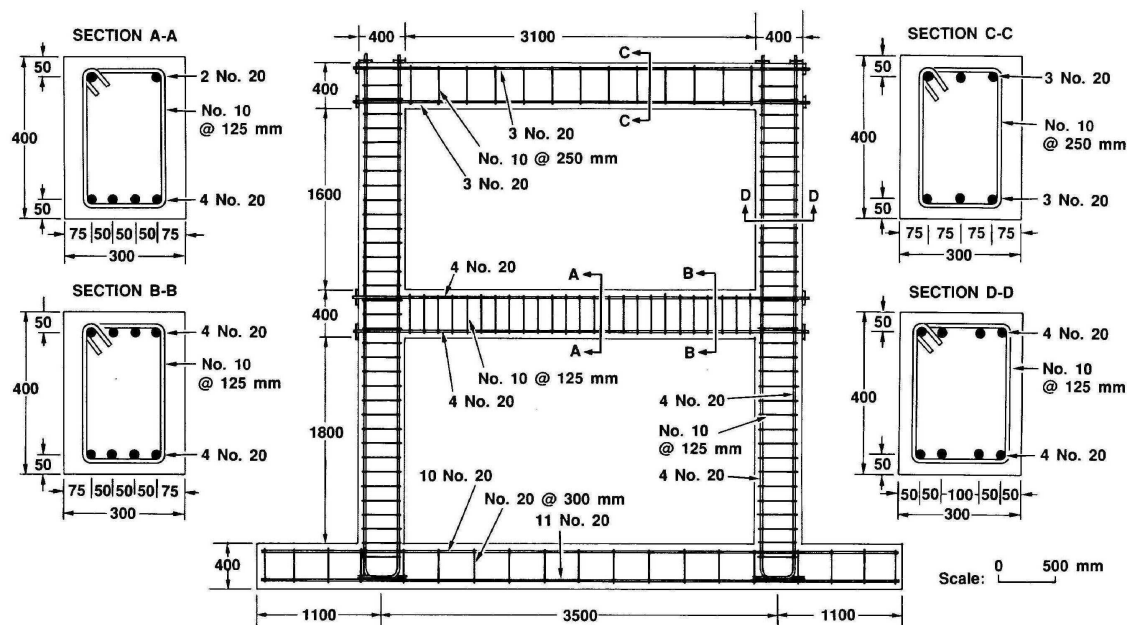


Figura 7.10: dettagli telaio,

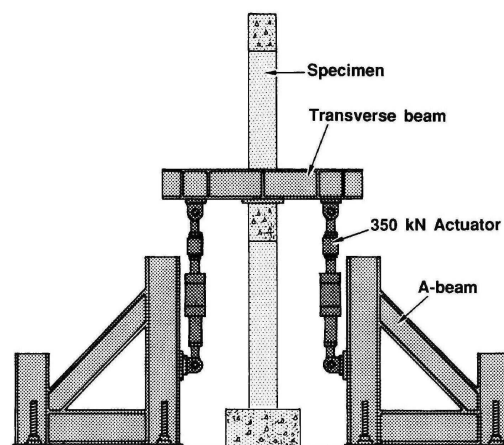
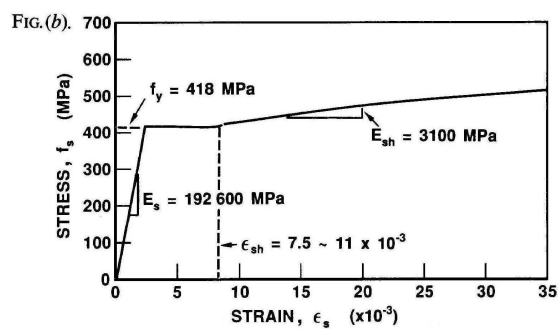
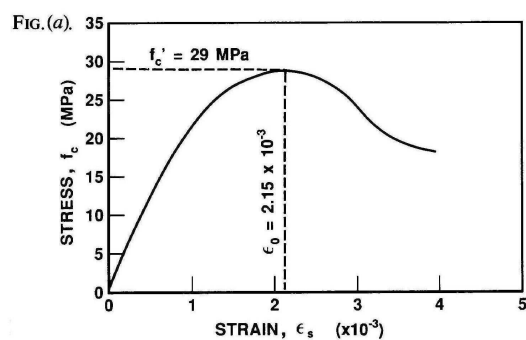


FIG. (c).

Figura 7.11: (a) legame $\sigma - \varepsilon$ calcestruzzo, (b) legame $\sigma - \varepsilon$ acciaio, (c) schema di carico

fissata sulla pavimentazione del laboratorio, mediante bullonatura. Le proprietà del calcestruzzo sono state determinate da test su provini cilindri di $150 \times 300mm$; esso ha presentato una resistenza alla compressione di $29MPa$ e una curva deformazione-sollecitazione riportata in figura(7.11a). L'acciaio di rinforzo ha una tensione di snervamento di $418MPa$ una tensione ultima di $596MPa$, un modulo di elasticità di $192600MPa$ e modulo di incrudimento di $3100MPa$. L'obiettivo dell'esperimento è stato quello esaminare il comportamento del telaio caricato da una forza concentrata, nella sezione di mezzeria della trave a primo piano. La configurazione di prova è riportata nella figura(7.11c). Il carico è stato applicato usando due attuatori servoassistiti da $350kN$, disposti simmetricamente su entrambi i lati del telaio, applicati sulla trave trasversale. Gli attuatori, a loro volta, sono stati montati su una trave d'acciaio a forma di A, e bullonata alla pavimentazione del laboratorio. Per monitorare il comportamento durante il test, il telaio è stato dotato di strumentazione elettronica: dodici trasduttori di spostamento (VDT L), posizionati in punti chiave di tutto il telaio. Misure delle tensioni superficiali sono state effettuate utilizzando calibri elettronici 'Zurigo' ogni $200mm$, lungo ciascun elemento. Il carico è stato applicato al telaio, con la modalità del controllo di corsa degli attuatori, con una velocità media della corsa di $2,0 \times 10^{-3}mm/s$. Particolare attenzione è stata prestata per mantenere, in ogni momento, la stessa corsa per entrambi gli attuatori. Mentre venivano registrati i meccanismi di rottura e si conduceva un'ispezione visiva del telaio, il carico è stato mantenuto costante. Il carico è stato inizialmente applicato con incrementi di circa $15kN$, ridotti a $10kN$ nelle fasi intermedie del test. Nelle ultime fasi, i carichi sono stati definiti da corse con incrementi di $2,5mm$. I test sono continuati per diversi giorni, con un totale di 36 fasi di carico. Alla fine di ogni giorno, il telaio è stato scaricato e sono state registrate le condizioni residue. Il giorno successivo, il carico iniziale è stato circa lo stesso del carico finale raggiunto il giorno precedente.

7.3.1 Osservazioni sul test

Il telaio di prova alla fine del periodo di stagionatura è risultato già fessurato per effetto del ritiro. Con il telaio ancora in posizione orizzontale, è stata osservato, che la superficie superiore di ciascun elemento presentava una media di sei fessure con apertura di $0,20 \div 0,25mm$, distribuiti uniformemente lungo la lunghezza dell'elemento.

Le fessure si estendono per l'intera altezza, ma non sono più profonde di circa $100mm$; queste si sono ulteriormente sviluppate durante il sollevamento del telaio. Il test è iniziato circa 6 mesi dopo la costruzione.

In corrispondenza del carico di $45kN$, nella zona centrale, dal lato inferiore della trave,

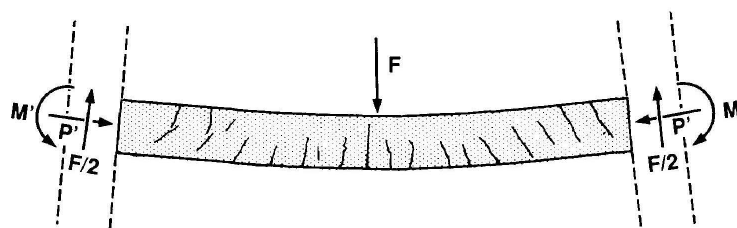


Figura 7.12: Andamento lesioni

sono apparse distinte fessure flessionali; tuttavia a queste fessure non è corrisposta, alcuna variazione della risposta carico-spostamento. Al crescere del carico, si sono iniziate a formare delle fessure da flessione nelle estremità della trave del primo piano e alla base dei pilastri. Con un carico di $120kN$, si è avuta la rottura del modello e si è osservata una sensibile riduzione della rigidezza. Successivamente, il carico è servito principalmente per aumentare l'ampiezza delle fessure esistenti, piuttosto che, provocare la formazione di nuove crepe. La progressione delle fessure nei pilastri è stata molto più graduale: le crepe da flessione emergevano ancora, con l'aumento del carico oltre i $300kN$. In generale, l'ampiezza delle fessure, in questa fase di carico è stata limitata a $0,75mm$ nella trave e $0,25mm$ nei pilastri. Con un carico di $360kN$, in mezzzeria, si è avuto lo snervamento dell'armatura inferiore della trave, il quale è stato dedotto dalle deformazioni misurate. Ciò ha portato ad aumento notevole dell'ampiezza delle fessure (superiore a $1,00mm$) ed un'ulteriore riduzione della rigidezza. Poco dopo, a $370kN$, si è snervata l'armatura superiore in entrambe le estremità della trave. In seguito, è stata rilevata una ulteriore deformazione della trave, che ha causato un allargamento delle fessure in corrispondenza delle zone di mezzzeria e nelle estremità. Con un carico di $430kN$, si è avuto un cedimento e la frantumazione del calcestruzzo, il che ha suggerito che è stata raggiunta la capacità ultima della sezione di mezzzeria. La cerniera plastica formatasi in mezzzeria, ha provocato una ridistribuzione dei momenti. A $489kN$, lo schiacciamento del calcestruzzo ha accelerato lo snervamento delle armature, sicchè anche il nodo trave-pilastro si è avvicinato alla capacità ultima, con la possibilità di formazione di un meccanismo a tre cerniere. Il carico è stato incrementato fino a $517kN$, in corrispondenza del quale è stato ritenuto che ha esaurito la propria capacità. Sebbene si è avuto lo schiacciamento locale del calcestruzzo, il telaio ha mostrato un alto grado di duttilità ed è stato in grado di mantenere il carico massimo. Per osservare la modalità finale di collasso, il telaio è stato scaricato e poi ricaricato con una velocità maggiore: $(50,0 \times 10^{-3}mm/s)$. La maggiore velocità di applicazione del carico, ha comportato un onere maggiore, rispetto a quello mostrato in precedenza, raggiungendo improvvisamente il collasso a $540kN$, quindi prima di quanto previsto. La modalità di collasso

coinvolta, è la combinazione di un meccanismo di collasso a flessione (cerniere plastiche in mezzzeria e nei nodi) e una rottura da taglio in corrispondenza della mezzzeria della trave.

L'analisi teorica condotta dallo stesso Vecchio [115]), è stata realizzata con il TEMPEST (Vecchio 1987), un programma per l'analisi non lineare di telai piani in calcestruzzo armato, soggetti a carichi meccanici e/o termici. Il programma tiene conto degli effetti del secondo ordine, del comportamento non lineare del calcestruzzo e dell'acciaio, degli effetti di irrigidimento, della non linearità geometrica, della storia di carico, del creep, del ritiro, della geometria variabile sia della trave che delle armature. Tuttavia all'epoca dell'esperimento non teneva conto degli effetti del taglio.

7.3.2 Confronto tra modelli

Per testare l'elemento proposto, è stato modellato il telaio con le stesse dimensioni e gli stessi parametri. Il carico è stato applicato con una loadhistory di quindici incrementi, fino al valore di 500 kN

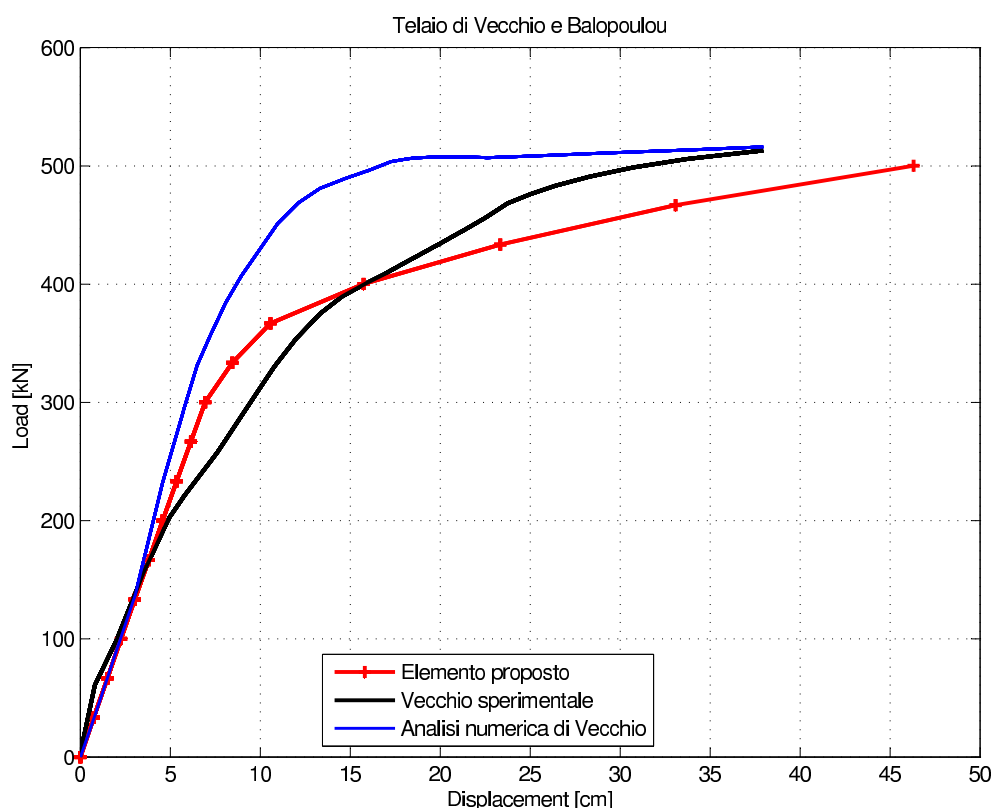


Figura 7.13: Confronto con analisi di Vecchio, sia sperimentale che teorica

Il modello proposto per bassi valori del carico, coincide con la formulazione FEM tradizionale; in quest'ultimo è contemplato il tension-stiffening, che provoca un recupero della rigidità. Il valore di snervamento della sezione, nell'elemento proposto, risulta essere inferiore a quello

mostrato sperimentalmente, anche perchè quest'ultimo non è ben definito. Tuttavia il modello proposto si avvicina maggiormente alla curva sperimentale, rispetto al modello FEM.

7.4 Modello di Vecchio-Emara

Altro test per l'elemento proposto, è stato modellare un telaio sottoposto a prova sperimentale da Vecchio e Emara nel 1992. Il telaio ha interasse di 3500mm interpiano di 2000mm e altezza complessiva di 4600mm come mostrato in figura(7.15). Le sezioni delle travi e dei pilastri hanno larghezza di 300mm e 400mm di profondità, mentre la trave alla base larghezza di 800mm e profondità di 400mm per creare una fondazione essenzialmente fissa. Il telaio è stato costruito con un solo getto di calcestruzzo e la base è stata fissata al pavimento del laboratorio, utilizzando dieci coppie di bulloni che sono stati pre-tesi, al fine di evitare lo slittamento. Le proprietà del calcestruzzo sono state determinate da prove su provini cilindrici, mentre per l'acciaio sono stati considerati i valori nominali, tutti i valori sono riassunti nella tabella (7.14). Il test del telaio prevedeva l'applicazione di un carico assiale di 700kN per ciascun pilastro, mantenuto costante per tutta la prova, mentre è stato applicato monotonicamente un carico orizzontale al secondo piano, fino al raggiungimento della capacità massima. I carichi sui pilastri sono stati applicati con due coppie di martinetti idraulici da 450kN ; il carico laterale è stato applicato tramite un attuatore da 1000kN , contrastato lateralmente contro un muro ad alta resistenza.

	Reinforcement								Concrete				
	A_s (mm^2)	d_b (mm)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (MPa)	E_{sh} (MPa)	ϵ_{sh} ($\times 10^{-3}$)	ϵ_u ($\times 10^{-3}$)	f'_c (MPa)	ϵ_0 ($\times 10^{-3}$)	E_c (MPa)	G_c (MPa)	μ
No.20	300	19.5	418	596	192500	3100	9.5	66.9	30	1.85	23674	9864*	0.2*
No.10	100	11.3	454	640	200000*	3100*	9.5*	69.5	* estimated				

Figura 7.14: Materiali trave

7.4.1 Analisi con programma Ruaumoko

Il modello analitico usato nell'analisi di RUAUMOKO è riportato in figura(7.16). In ciascun nodo è stato inserito un braccetto rigido, per le cerniere sono state assunte delle lunghezze pari all'altezza della sezione, cioè, 400mm . Vecchio ha poi osservato che l'uso di cerniere con lunghezze diverse non influenza i risultati.

7.4.2 Modello con elemento proposto

Il telaio è stato modellato seguendo due strade, nella prima si modellano travi e pilastri con l'elemento trave proposto, mentre, nella seconda sono stati considerati dei braccetti rigidi nei nodi come mostrato in figura(7.16). In entrambi i casi il carico verticale è stato mantenuto

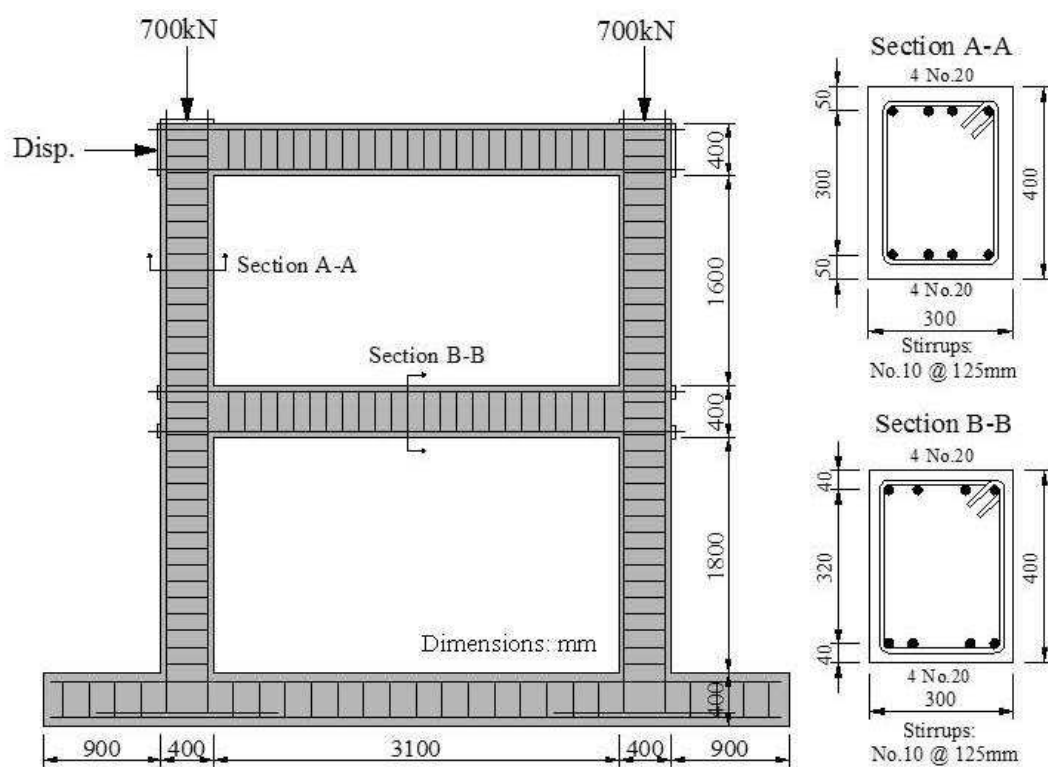


Figura 7.15: Dettagli telaio e sezioni

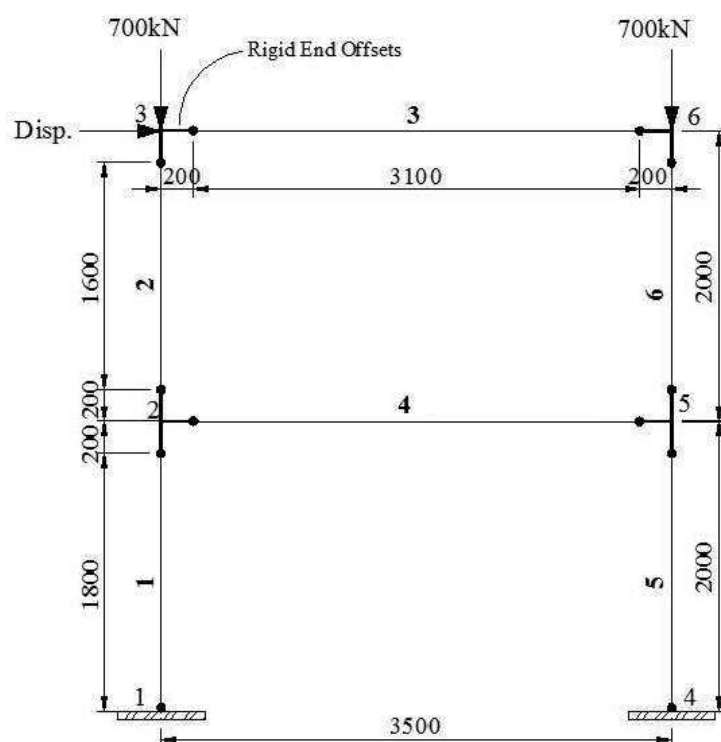


Figura 7.16: Modello di calcolo di Ruaumoto

costante, mentre il carico orizzontale è stato applicato monotonicamente, con 24 incrementi. I risultati sono riportati nelle figure (7.17) e (7.18).

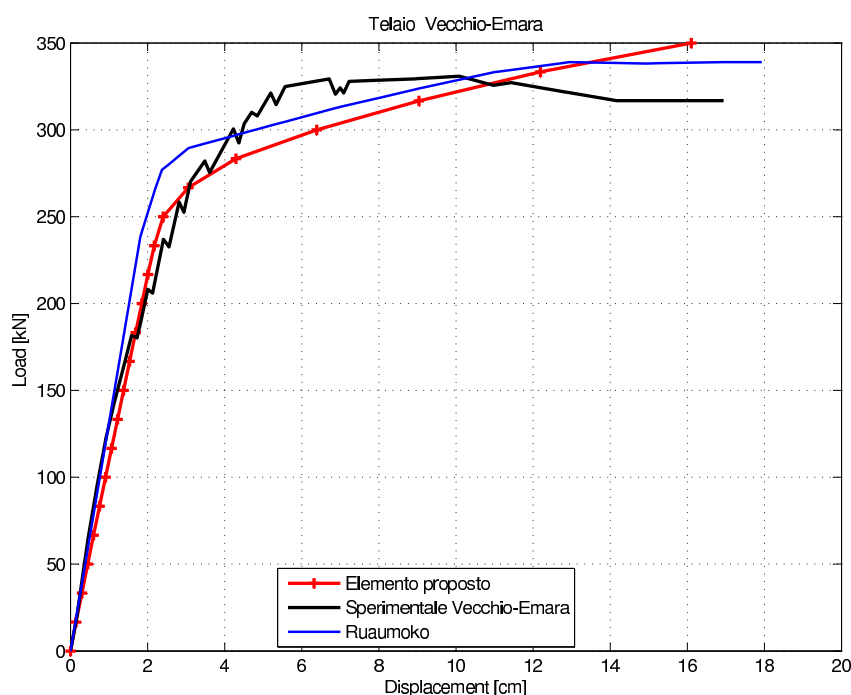


Figura 7.17: Grafico modello reale

7.4.3 Il confronto dei risultati analitici e sperimentali

Nel modello iniziale, la struttura presenta un comportamento più deformabile rispetto a quello sperimentale. Nel secondo modello, invece l'elemento presenta una comportamento coincidente con quello sperimentale: ciò giustifica la necessità di inserire i braccetti rigidi. In entrambi i casi, la struttura proposta, presenta un carico di snervamento più basso, sia rispetto a quello sperimentale, che quello FEM. Nel tratto non lineare la rigidezza risulta essere più alta rispetto agli altri casi, ma questo è dovuto al legame costitutivo del calcestruzzo tipo parabola-rettangolo.

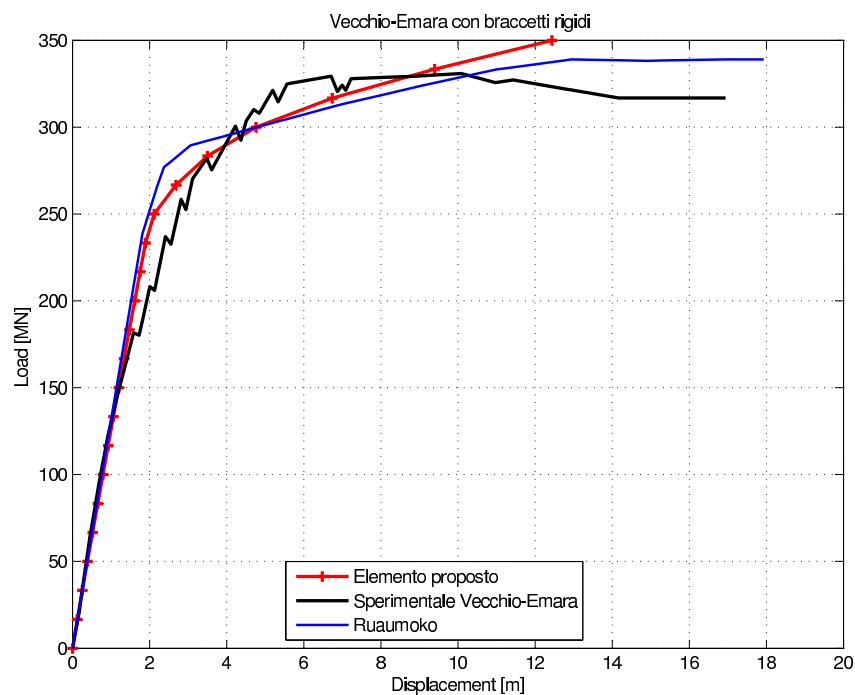


Figura 7.18: Grafico con braccetti rigidi

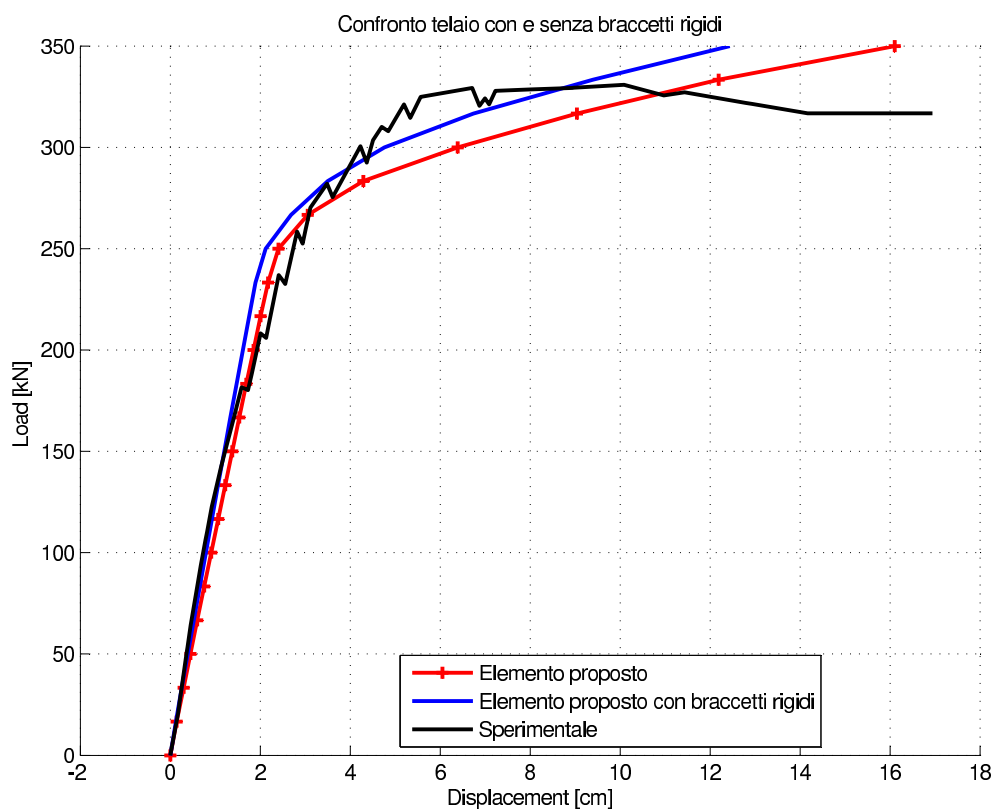


Figura 7.19: Confronto tra il modelli con e senza braccetti rigidi

Capitolo 8

Conclusioni

Nell’ambito di una formulazione alle forze basta sul modello di Eulero-Bernoulli, è stato programmato in Matlab un elemento finito tipo trave per l’analisi statica non lineare di strutture intelaiate. L’elemento finito proposto costituisce l’estensione di un elemento originariamente proposto da Neuenhofer e Filippou [67] in quanto:

1. L’analisi sezionale viene condotta con la recente metodologia “fiber-free” anzichè con il tradizionale metodo a fibre;
2. È possibile applicare carichi distribuiti o concentrati arbitrari lungo l’elemento in modo da modellare ciascuna trave o pilastro del modello strutturale con un unico elemento finito;
3. Sono state introdotte delle funzioni spline di interpolazione del campo di deformazione, a sua volta ricavato a partire da quello di tensione, da cui viene ricavato il campo di spostamenti lungo l’elemento. In tal modo è possibile determinare la posizione e le dimensioni effettive delle eventuali zone plasticizzate nonché eseguire verifiche di duttilità e deformabilità in punti non coincidenti con le sezioni di controllo lungo l’elemento o con i suoi nodi di estremità.

Per contro l’elemento proposto presenta delle limitazioni in quanto non si tiene in conto di eventuali rami di softening del legame costitutivo del calcestruzzo, si trascura la deformabilità a taglio nonché ulteriori fenomeni tipici del comportamento non lineare di strutture in cemento armato quali lo scorrimento tra la barra di armatura ed il calcestruzzo, il tension-stiffening, ecc. Nonostante tali limitazioni le analisi condotte con riferimento a esempi campione tratti dalla letteratura hanno mostrato un confortante accordo con i risultati sperimentali e tempi di calcolo assolutamente ragionevoli sì da rendere possibile in un prossimo futuro l’uso di algoritmi non lineari anche nelle applicazioni correnti della pratica professionale.

Bibliografia

- [1] Armstrong, P. J. and Frederick, C. O. [1966] *A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect*, G.E.G.B. Report RD/B/N 731.
- [2] Bazant, Z. P. and Oh, B. H. [1985] *Microplane model for progressive fracture of concrete and rock*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 111(4), 559-582.
- [3] Bazant, Z. P. and Prat, P. C. [1988] *Microplane model for brittle-plastic material. Parts I and II*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 114(10), 1672-1702.
- [4] Bazant, Z. P. and Ozbolt, J. [1990] *Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in concrete structures*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 116(11), 2484-2504.
- [5] Bairan, J. M. [2005] *A nonlinear coupled model for the analysis of reinforced concrete sections under bending, shear and torsion and axial forces*, PhD thesis, Technical University of Catalonia, Barcelona, Spain.
- [6] Bairan, J. M. and Mari, A. R. [2006a] *Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3D loading. Part 1: Theoretical formulation*, Computers and Structures 84, 2254-2263.
- [7] Bairan, J. M. and Mari, A. R. [2006b] *Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3D loading. Part 2: Implementation and validation*, Computers and Structures 84, 2264-2276.
- [8] Bentz, E. C. [2000] *Sectional analysis of reinforced concrete members*, PhD thesis, University of Toronto, Toronto, Canada.
- [9] Benzoni, G., Ohtaki, T., and Priestley, M. J. N. [1996] *Seismic performance of full scale bridge column as built and as repaired*, Internal Report, University of California San Diego, California.

- [10] Benzonì, G., Priestley, M. J. N., and Seible, F. [2000] *Seismic shear strength of columns with interlockingspiral reinforcement*, Proceedings of the Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand. Flexure-Shear Fiber Elements for Modeling of Frame Structures 85
- [11] Bousias, S. N., Verzelletti, G., Fardis, M. N., and Guitierrez, E. [1995] *Load-path effects in column biaxial bending and axial force*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 121(5), 596-605.
- [12] CEA [1990] *CASTEM 2000, Guide d'Utilisation* CEA, Saclay, France.
- [13] Cervenka, V. [1985] *Constitutive model for cracked reinforced concrete*, ACI Journal 82(6), 877-882.
- [14] Ceresa P, Petrini L, Pinho R. *Flexure-shear fiber beam-column elements for modeling frame structures under seismic loading - State of the art*. Journal of Earthquake Engineering [2007]; bf 11:46-88.
- [15] Chambon, R., Caillerie, D., and Matsushima, T. [2001] *Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies*, International Journal of Solids and Structures 38, 8503-8527.
- [16] Chan, E. C. [1982] *Nonlinear geometric, material and time-dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams*, PhD Thesis, University of California, Berkeley.
- [17] Ciampi, Y. & L. Carlesimo, *A non-linear beam element for seismic analysis of structures*, Proc., 8th Eur. Conf. on Earthquake Engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal, [1986].
- [18] Cladera, A. [2002] *Shear design of reinforced high-strength concrete beams*, PhD Thesis, Technical University of Catalonia, Barcelona, Spain.
- [19] Collins, M. P. and Lampert, [1982] *Redistribution of moments at cracking-the key to simpler torsion design*, analysis of structural systems for torsion, ACI Publication SP-35, 343-383.
- [20] Collins M. P. and Mitchell, D. [1991] *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 776 pp. Crisfield, M. A. [1986] *Finite elements and solution procedures for structural analysis, Vol. 1: linear analysis*, Pineridge Press, Swansea, U. K.
- [21] Crisfield, M.A. *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*, Computers e Structures, 13, 55-62 [1981].

- [22] Crisfield, M.A. Wills J., *An arc-length method including line searches and accelertions*, Int. J. Num. Meth. Engny., 19, 1269-1289 [1983].
- [23] Crisfield, M.A. & J. Wills, *Criteria for a reliable non-linear finite element system, Reliability of Methods, for Engineering Analysis*, ed. K. J. Bathe et all., Pineridge press, Swansea, pp. 159-179 [1986].
- [24] Crisfield, M. A. [1986] *Finite elements and solution procedures for structural analysis, Vol. 1: linear analysis*, Pineridge Press, Swansea, U. K.
- [25] Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures - Vol 1*, John Wiley e Sons Ltd., Chichester, England [1991].
- [26] Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures - Advanced Topics, Vol 2*, John Wiley e Sons Ltd., Chichester, England [1996].
- [27] Dazio, A., Wenk, T., and Bachmann, H. [1999] *Versuche an Stahlbetontragwandenunter Zyklischstatischer Einwirkung*, IBK Bericht239, ETH Zurich, Basel, Switzerland.
- [28] De Sortis, A. and Nuti, C. [1996] *Seismic response by pseudo-dynamic tests of RC bridgesdesigned to EC8*, Proceedings of the Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico.
- [29] Elzanaty, A. H., Nilson, A. H., and Slate, F. O. [1986] *Shear capacity of prestressed concretebeams using high-strength concrete*, ACI Journal, Proceedings 83(3), 359-368.
- [30] European Committee for Standardization. *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance* [1998].
- [31] Federal Emergency Management Agency. *Prestandards and commentary for the seismic rehabilitation of Buildings*, American Society of Civil Engineers [2000].
- [32] Felber, A. J. [1990] *RESPONSE: A program to determine the Load-Deformation Response of Reinforced Concrete Sections*, MASc Thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Canada.
- [33] Filippou, F. C. [1996] *Nonlinear static and dynamic analysis for evaluation of structures*, Proceedings of the Third European Conference on Structural Dynamics Eurodyn 96, Florence, Italy, 395-402.

- [34] Filippou, F. C. and Spacone, E. [1996] *FEDEAS: Nonlinear Analysis for Structural Evaluation*, Proceedings of the Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Mexico. FEDEAS is available from the URL: <http://www.ce.berkeley.edu/filippou/Research/fedeas.htm>
- [35] Garstka, B., Kratzig, W. B., and Stangenberg, F. [1993] *Damage Assessment in cyclically loaded reinforced concrete members*, Structural Dynamics, EUROLYN 93, Moan, Ed. Balkema, Rotterdam 1, 121-128.
- [36] Guedes, J., Pegon, P., and Pinto, A. V. (1994) *A Fibre/Timoshenko Beam Element in CASTEM2000*, Special Publication Nr. I.94.31 Applied Mechanics Unit, Safety Technology Institute, Commission of the European
- [37] Guedes, J. and Pinto, A. V. [1997] *A numerical model for shear dominated bridge piers*, Proceeding of the Second Italy-Japan Workshop on Seismic Design and Retrofit of Bridges, Rome, Italy.
- [38] Haddadin, M. J., Hong, S.-T., and Mattock, A. H. [1971] *Stirrup effectiveness in reinforced concrete beams with axial force*, Proceedings, ASCE 97(ST9), 2277-2297.
- [39] Hughes, T. J. R. [2000] *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- [40] Izzuddin BA, Lloyd Smith D. *Efficient nonlinear analysis of elasto-plastic 3D R/C frames using adaptive techniques*, Computers and Structures [2000]; 78:549-573.
- [41] Izzuddin BA, Siyam AAFM, Lloyd Smith D. *An efficient beam-column formulation for 3D reinforced concrete frames*, Computers and Structures [2002]; 80:659-676.
- [42] Kani, M. [1977] *An experimental investigation of reinforced and prestressed beams in shear*, MASC Thesis, University of Toronto, Toronto, Canada.
- [43] Kawano, H. and Watanabe, H. [1997] *Shear strength of reinforced concrete columns-effect of specimen size and load reversal*, Proceedings of the Second Italian-Japan Workshop on Seismic Design and Retrofit of Bridges, Queenstown, New Zealand.
- [44] Karsan ID, Jirsa JO. *Behavior of concrete under compressive loading*, ASCE Journal of Structural Division [1969]; 95-ST12: 2543-2563.
- [45] Kotronis, P. [2000] *Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D*, PhD Thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

- [46] Kotronis, P. and Mazars, J. [2005] *Simplified modelling strategies to simulate the dynamic behavior of R/C walls*, Journal of Earthquake Engineering 9(2), 285-306.
- [47] Kotronis, P., Chambon, R., Mazars, J., and Collin, F. [2005] *Local second gradient models and damage mechanics: application to concrete*, ICFXI-Proceedings of the 11th International Conference on Fracture, Turin (Italy), March 20-25.
- [48] Kupfer, H. B. and Gerstle, K. H. [1973] *Behaviour of concrete under biaxial stresses*, Journal of Engineering Mechanical Division, ASCE 99(4), 853-866.
- [49] Kwak H.G., D.Y. Kim, *Non-linear analysis of RC shear walls considering tension-stiffening effect*, [2001].
- [50] Lemaitre, J. and Chaboche, J. L. [1990] *Mechanics of Solids Material*, Cambridge University Press, Cambridge. Low, S. S. and Moehle, J. P. [1987] *Experimental study of reinforced concrete columns subjected to multi-axial cyclic loading*, Report No UCB/EERC.87/14, University of California, Berkeley, California.
- [51] Lee C-L, Filippou FC. *Frame elements with mixed formulation for singular section response*, Int. J. Numer. Meth. Engng. [2009]; 78:1320-1344.
- [52] Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R. [1988] *Theoretical stress-strain model for confined concrete*, Journal of Structural Engineering, ASCE 114(8), 1804-1826.
- [53] Marini, A. and Spacone E. [2006] *Analysis of reinforced concrete elements including shear effects*, ACI Structural Journal 103(5), 645-655.
- [54] Marmo F. *A Fiber-Free approach to the inelastic analysis of reinforced concrete structures*. PhD Thesis, Università degli Studi di Napoli Federico II, [2008].
- [55] F. Marmo, & L. Rosati *An improved flexibility-based non-linear frame element endowed with the Fiber-Free formulation*, Proceeding of Eccomas 2012 to be held in Wien september [2012].
- [56] Marmo F, Rosati L. *Analytical integration of elasto-plastic uniaxial constitutive laws over arbitrary sections*, International Journal for Numerical Methods in Engineering [2012]; 91(9):990-1022.
- [57] F. Marmo, & L. Rosati *The fiber-free approach in the evaluation of the tangent stiffness matrix for elasto-plastic uniaxial constitutive laws*, Accepted for publication on International Journal for Numerical Methods in Engineering, Published online [2012].

- [58] Martinelli, L. [1998] *Modellazione di pile di ponti in C. A. a travata soggetti ad eccitazione sismica*, PhD Thesis, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milano, Italy.
- [59] Martinelli, L. [2000] *The behavior of reinforced concrete piers under strong seismic actions*, Proceedings of the Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand.
- [60] Martinelli, L. [2002] *Numerical simulation of cyclic tests of R/C shear walls*, Proceedings of the Twelfth European Conference on Earthquake Engineering, London, United Kingdom.
- [61] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F., and Casaux, G. [2006] *Using multifibre beams to account for shear and torsion. Applications to concrete structural elements*, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering 195(52), 7264-7281.
- [62] Menegotto, M. and Pinto, P. E. [1973] *Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non elastic behaviour of elements under combined normal force and bending*, IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads, Final Report, Lisbon, Portugal.
- [63] Menegotto, M. and Pinto, P. E. [1977] *Slender RC compressed members in biaxial bending*, Journal of Structural Division, ASCE 103(3), 587-605.
- [64] MIDAS Software, *MIDAS Information Technology Co., Ltd. (MIDAS IT)*. Available from: <http://www.midasuser.com/>. [17 May 2012]
- [65] Monti, G. and Nuti, C. [1992] *Nonlinear cyclic behaviour of reinforcing bars including buckling*, Journal of Structural Engineering, ASCE 118(12), 3268-3284.
- [66] A. Neuenhofer, *Finite element reliability analysis of nonlinear reinforced concrete frame structures*, PhD dissertation, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, Germany (in German), [1993].
- [67] Neuenhofer A, Filippou FC. *Evaluation of nonlinear frame finite-element models*, ASCE Journal of Structural Engineering [1997]; 123(7):958-966.
- [68] Nukala PKVV, White DW. *Variationally Consistent State Determination Algorithms for Nonlinear Analysis Using Mixed Rod Finite Element Formulations*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering [2003]; 193:3647-3666.

- [69] Onsongo, W. M. [1978] *The diagonal compression field theory for reinforced concrete beams subjected to combined torsion, flexure and axial load*, PhD Thesis, University of Toronto, Toronto, Canada.
- [70] *Open System for Earthquake Engineering Simulations (OpenSEES)*, University of California, Berkeley, CA, USA. Available from: <http://opensees.berkeley.edu>. [17 May 2012]
- [71] Ozbolt, J. and Bazant, Z. P. [1992] *Microplane model for cyclic triaxial behaviour of concrete*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 118(7), 1365-1386.
- [72] J.P. Padovan, & T.Arechaga, *Formal convergence characteristics of elliptically constrained incremental Newton-Raphson algorithms*, Int. J. Engng. Sci., 20, 1077- 1097 [1982].
- [73] Palermo, D. and Vecchio, F. J. [2002] *Behavior and analysis of reinforced concrete walls subjected to reversed cyclic loading*, Publication No 2002-01, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Canada.
- [74] Papachristidis A, Fragiadakis M, Papadrakakis M. *A 3D fibre beam-column element with shear modelling for the inelastic analysis of steel structures*. Computational Mechanics 2010; 45:553-572.
- [75] Park K.C., *A family of solution algorithms for nonlinear structural analysis based on the relaxation equations*, Znt. J. Num. Meth. Engng., 18, 1337-1347 [1982].
- [76] Pegon, P. [1994] *A Timoshenko simple beam element in CASTEM 2000*, Joint Research Centre Special Publication No I.94.04, Ispra, Italy.
- [77] Pegon, P., Plumier, C., Pinto, A., Molina, J., Gonzalez, P., Tognoli, P., and Hubert, O. [2000] *U-shaped-wall: description of the experimental set-up*. Report Joint Research Centre (JRC), Ispra, Italy.
- [78] Perotti, F., De Amici, A., and Venturini, P. [1996] *Numerical analysis and design implications of theseismic behavior of one-storey steel bracing systems*, Engineering Structures 18(2), 162-178.
- [79] Petrangeli, M. and Ciampi, V. [1994] *A flexibility based 3-dimensional fibre beam element*, Proceedings of Eight Italian Conference on Computational Mechanics, Torino, Italy.
- [80] Petrangeli, M. [1996] *Modelli numerici per strutture monodimensionali in cemento armato*, PhDthesis, Università di Roma "La Sapienza", Roma, Italy.

- [81] Petrangeli M, Ciampi V. *Equilibrium based iterative solutions for the non-linear beam problem*, International Journal for Numerical Methods in Engineering [1997]; 40(3):423-437.
- [82] Petrangeli M, Pinto PE, Ciampi V. *Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory*, ASCE Journal of Engineering Mechanics [1999]; 125(9):994-1001.
- [83] Petrangeli M. *Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. II: Verification*, ASCE Journal of Engineering Mechanics [1999]; 125(9):1002-1009.
- [84] Pijaudier-Cabot, G. and Bazant, Z. P. [1987] *Nonlocal damage theory*, Journal of Engineering Mechanics 113, 1512-1533.
- [85] Pinto, A. V., Verzeletti, G., Negro, P., and Guedes, J. [1995] *Cycling testing of a squat bridge pier*, Report EUR 16247 EN, EC, JRC, Ispra, Italy.
- [86] Pipa, M. and Carvalho, E. [1993] *Cyclic tests on R/C cantilever T beams with B500 steel*, Cooperative Research Program on Seismic Response of R/C Structures, LNEC, Lisbon, Portugal.
- [87] Porasz, A. [1989] *An investigation of the stress-strain characteristics of high strength concrete in shear*, MSc Thesis, University of Toronto, Canada.
- [88] Priestley, M. J. N., Verma, R., and Xiao, Y. [1994] *Seismic shear strength of reinforced columns*, Journal of Structural Engineering, ASCE 120, 2310-2329.
- [89] Ranzo, G. and Petrangeli, M. [1998] *A fibre finite beam element with section shear modelling for seismic analysis of RC structures*, Journal of Earthquake Engineering 2, 443-473.
- [90] Ranzo, G. [2000] *Experimental and numerical studies on the seismic performance of beam-column RC structural members subjected to high shear*, PhD Thesis, Università di Roma "La Sapienza", Roma, Italy.
- [91] Remino, M. [2004] *Shear modelling of reinforced concrete structures*, PhD Thesis, Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Brescia, Brescia, Italy.
- [92] Response-2000 [2000] *Response-2000* Available freely from the URL <http://www.ecf.utoronto.ca/~bentz/download.htm>
- [93] Riks E., *The application of Newton method to the problem of elastic stability*, J . Appl. Mech., 39, 1060-6, [1972].

- [94] Riks E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. Solids & Strum. 15, 529-551 [1979].
- [95] Riks E., & C.C. Rankin, *Bordered Equations in Continuation Methods: An Improved Solution Technique*, Nat. Aero Lab. Report NLR MP 82057 U [1987].
- [96] Riva, P., Plizzari G. A., and Franchi, A. [1997] *Influenza delle caratteristiche meccaniche dell'acciaio da armatura sulla duttilità delle strutture in C.A.*, Giornate A.I.C.A.P. '97, Rome, Italy (inItalian).
- [97] Rose, B. W. [2001] *A constitutive model for the analysis of reinforced concrete beam-columns subjected to lateral loads*, Ph.D. Thesis, CEAE Dept., University of Colorado, Boulder, Colorado.
- [98] Saenz, L. P. [1964] *Discussion of equation for the stress-strain curve of concrete by desay and Krishman*, ACI Journal 61(9), 1227-1239.
- [99] Saje M, Turk I, Vratnar B. *A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering [1997]; 144:125-151.
- [100] Saritas A, Soydas O. *Variational base and solution strategies for non-linear force-based beam finite elements*, International Journal of Non-Linear Mechanics [2012]; 47:54-64.
- [101] Scordelis, A. C. [1984] *Computer models for nonlinear analysis of reinforced and prestressed concrete structures*, PCI Journal 29(6).
- [102] Spacone, E., Ciampi, V., and Filippou, F. C. [1992] *A beam element for seismic damage analysis*, University of California at Berkeley, Earthquake Engineering Research Centre report 92/08.
- [103] Spacone E, Ciampi V, Filippou FC. *Mixed formulation of nonlinear beam finite element*. Computers & Structures [1996]; 25:711-725.
- [104] Spacone E, Filippou FC, Taucer F. *Fibre beam-column model for non-linear analysis of RC frames: Part I Formulation*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics [1996]; 25:711-725.
- [105] Spacone E, Filippou FC, Taucer F. *Fibre beam-column model for non-linear analysis of RC frames: Part II Applications*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics [1996]; 25:727-742.

- [106] Spacone, E. and Limkatanyu S. [2000] *Response of RC members including bond-slip effects*, ACI Structural Journal 6, 831-839.
- [107] Stevens, N. J., Uzumeri, S. M., and Collins, M. P. [1987] *Analytical modelling of reinforced concrete subjected to monotonic and reversed loadings*, Publication n° 87-01, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Canada.
- [108] F.F. Taucer, E. Spacone, & F.C. Filippou, *A fiber beam column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures*, Rep. 91117, EERC, Earthquake Engineering Research Center (EERC), Univ. of California, Berkeley, Calif. [1991].
- [109] Taylor, R. L. [2000] *A finite element analysis program, Version 7.3*, Manual, University of California, Berkeley, California.
- [110] Taylor RL, Filippou FC, Saritas A, Auricchio F. *A mixed finite element method for beam and frame problems*, Computational Mechanics [2003]; 31:192-203.
- [111] van Mier, J. G. M. [1986] *Multiaxial strain-softening of concrete. Part I: fracture. Part II: load histories*, Materials and Structures 11(19), 179-200.
- [112] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. [1982] *Response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses*, Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Canada.
- [113] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. [1986] *The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear*, Journal of the American Concrete Institute 83 (2), 219-231.
- [114] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. [1988] *Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using the modified compression field theory*, ACI Structural Journal 85, 258-268.
- [115] F.J. Vecchio, S. Balopoulou *On the Non-Linear behavior of reinforced concrete framers*, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 35 St. George Street, Toronto, Ont. Canada M5S 1A4
- [116] Vecchio, F. J. and Selby, R. G. [1991] *Towards compression-field analysis of reinforced concrete solids*, Journal of Structural Engineering, ASCE 117(6), 1740-1758.
- [117] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. [1988] *Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using the modified compression field theory*, ACI Structural Journal 85, 258-268.

- [118] Vecchio, F. J. [1999] *Towards cyclic load modelling of reinforced concrete*, ACI Structural Journal 96(2), 193-202.
- [119] Vecchio, F. J. [2000] *Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation*, Journal of Structural Engineering 126(9), 1070-1077.
- [120] G. Weiler, *Nonlinear finite element analysis of reinforced and prestressed concrete frame structures*, PhD dissertation, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, Germany (in German), [1990].
- [121] G. A. Wempner, *Discrete approximations related to Non-Linear theories of solids*, Int. J. Solids & Struct., 7, 1581-1599 [1971].
- [122] Xiao, Y., Priestley, M. J. N., and Seible, F. [1993] *Steel jacket retrofit for enhancing shear strength of short rectangular reinforced concrete columns*, Report No SSRP 92/07, Department of Applied Mechanics and Engineering Sciences, University of San Diego, California.
- [123] C. Zieris, & S.A. Mahin, *Analysis of reinforced concrete beam-columns under uniaxial excitation*, 1. Struct. Engrg., ASCE, 114(4), 804-820. [1988].
- [124] C. Zieris, & S.A. Mahin, *Behavior of reinforced concrete structures subjected to biaxial excitation*. 1. Struct. Engrg., ASCE, 117(9), 2657 -2673. [1991].
- [125] Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L. [2005] *The Finite Element Method. 6th ed.* McGraw Hill, Bristol, U.K.
- [126] Zupan D, Saje M. *Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross sections*, Computers and Structures [2005]; 83:2368-2380.